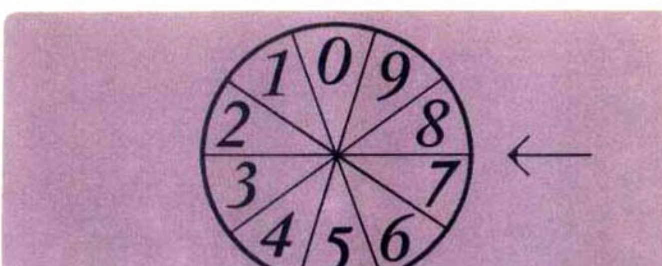
Lecciones populares de matemáticas

MÉTODO DE MONTECARLO

I. M. Sóbol



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО • МИР •

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

И. М. СОБОЛЬ

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

I. M. SÓBOL

MÉTODO DE MONTECARLO

TRADUCIDO DEL RUSO POR CARLOS VEGA
candidato a Doctor en Ciencias físico-mátematicas,
Catedrático de Matemáticas Superiores

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Primera edición 1976
Segunda edición 1983

IMPRESO EN LA URSS.

На испанском языке

Indice

Prefacio 7

Introducción 9

§ 1. Generalidades del método 9

Capítulo 1. Simulación de variables aleatorias 15

§ 2. Variables aleatorias 15
§ 3. Obtención de variables aleatorias en las *MCE* 26
§ 4. Transformaciones de variables aleatorias 32

Capítulo 2. Ejemplos de aplicación del método de Montecarlo 42

§ 5. Análisis de un sistema de servicios 42
§ 6. Análisis de la calidad y de la seguridad de piezas 48
§ 7. Análisis del paso de neutrones a través de una placa 55
§ 8. Cálculo de la integral definida 63

Apéndice 68

§ 9. Demostración de algunas proposiciones 68
§ 10. Sobre los números seudoaleatorios 75

Tablas 78

Literatura 79

Prefacio

Hace unos años, la Universidad Social me invitó a dictar dos conferencias sobre el método de Montecarlo para los oyentes de la Facultad de Técnica de cálculo. Yo acepté. Poco antes de la primera conferencia me enteré con espanto de que los oyentes, en su mayor parte, ignoraban la Teoría de las probabilidades. No había modo de retroceder. Sobre la marcha hubo que incluir en la conferencia un apartado adicional con el fin de exponer a los oyentes las nociones principales de la Teoría de las probabilidades.

El contenido de estas conferencias, dictadas a lo largo de varios años, con el tiempo iba estabilizándose. En la edición presente se ha conservado también el apartado adicional (§ 2) al que quiero dedicar unas palabras.

Cualquier persona habrá empleado alguna vez las palabras «probabilidad» y «variable aleatoria». La idea intuitiva de la probabilidad (en tanto que frecuencia) corresponde más o menos al contenido verdadero de este concepto. En cambio, la idea intuitiva de la variable aleatoria está muy lejos, como regla, de la definición matemática. Por eso, en el § 2 damos por conocido el concepto de probabilidad y explicamos sólo el concepto más complejo de variable aleatoria. Este parágrafo no puede reemplazar el curso de la Teoría de las probabilidades: la exposición es simplificada y no trae demostraciones. Sin embargo, permite hacerse una idea sobre las variables aleatorias suficiente para comprender los aspectos elementales del método de Montecarlo.

El objetivo principal de este libro es sugerir a los especialistas de las más diversas ramas la idea de que en el campo de sus actividades existen problemas que se pueden resolver por el método de Montecarlo.

Los problemas que se analizan en las conferencias son variados y suficientemente simples. Sin embargo, no pueden abarcar, claro está, todas las esferas de aplicación del mé-

todo. Me limitaré a dar un ejemplo. En el libro no se habla para nada de la medicina. No obstante, los métodos del § 7 permiten evaluar las dosis en la radioterapía. Teniendo un programa de cálculo de los rayos absorbidos por distintos tejidos del cuerpo, se puede dosificar y orientar la radiación del modo más eficiente cuidando de no dañar los tejidos sanos.

Este libro abarca todo cuanto se trató en las conferencias; contiene una exposición más detallada de los ejemplos; además, se han agregado los parágrafos 9 y 10.

I. Sóbol

INTRODUCCIÓN

§ 1. GENERALIDADES DEL MÉTODO

El método de Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias.

1.1. Orígenes del método de Montecarlo. Se considera como fecha de nacimiento del método de Montecarlo el año 1949 en el que apareció el artículo titulado «The Monte Carlo method»[1]. La creación de este método suele ligarse a los nombres de los matemáticos norteamericanos J. von Neumann y S. Ulam. En la Unión Soviética los primeros artículos dedicados al método de Montercarlo aparecieron en 1955 y 1956 [2].

Es curioso que la base teórica del método era bien conocida desde hace mucho tiempo. Es más, algunos problemas de la Estadística se resolvían a veces empleando las muestras aleatorias, o sea, aplicando de hecho el método de Montecarlo. Sin embargo, hasta la aparición de las máquinas calculadoras electrónicas (*MCE*), este método no encontraba aplicaciones suficientemente amplias ya que la simulación a mano de variables aleatorias constituye un proceso muy laborioso. Es decir, la aparición del método de Montecarlo en tanto que un método numérico de gran universalidad se hizo posible sólo gracias a la creación de las *MCE*.

El nombre de «Montecarlo» se debe al de una población del principado de Mónaco, celebre por su casa de juego. Resulta que uno de los aparatos mecánicos más sencillos que permite obtener variables aleatorias es ... la ruleta. Acerca de esto hablaremos en el § 3. En cambio, conviene, por lo visto, responder aquí a una pregunta frecuente: «¿Ayuda o no el método de Montecarlo a ganar en el juego de la ruleta?» No, no ayuda. E incluso no tiene nada que ver con este juego.

1.2. Ejemplo. Para que el lector se haga una idea más clara de las cuestiones que vamos a tratar, consideremos un ejemplo muy sencillo. Supongamos que debemos calcular

[1] *Metropolis N., Ulam S.*, The Monte Carlo method, J. Amer. statistical assoc., 1949, 44, № 247, 335—341.

[2] Se trata de los artículos de V. V. Chavchanidze, Yu. A. Shréider y V. S. Vladímirov.

el área de una figura plana S. Ésta puede ser una figura arbitraria con una frontera curvilínea, definida gráfica o analíticamente y compuesta de uno o varios pedazos. Supongamos que se trata de la figura representada en la fig. 1

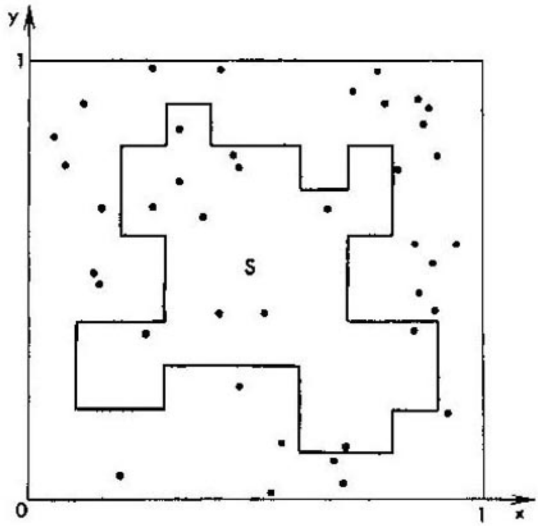


Fig. 1

y supongamos que toda la figura está comprendida dentro de un cuadrado de dimensión 1.

Tomemos en el cuadrado un número N de puntos aleatorios. Sea N' el número de puntos que aparecen dentro de S. Es obvio, por razones geométricas, que el área de S es igual aproximadamente a la razón N'/N. Cuanto mayor sea N tanto mayor será la exactitud de esta estimación.

En el ejemplo representado en la fig. 1 se ha escogido un total de $N = 40$ puntos. De éstos, $N' = 12$ puntos aparecen dentro de S. Tenemos $N'/N = 12/40 = 0{,}30$ mientras que el valor exacto del área de S es 0,35 [1]).

[1]) En la práctica el método de Montecarlo no se aplica al cálculo de área de figuras planas ya que existen para ello otros métodos que, a pesar de ser más complejos, garantizan una exactitud mucho mayor. (Sigue en la pág. 11).

1.3. Dos peculiaridades del método de Montecarlo. La primera consiste en que su algoritmo tiene una estructura muy sencilla. Como regla, se elabora primero un programa para la realización de una prueba aleatoria (en el ejemplo del punto 1.2 hay que escoger un punto aleatorio en el cuadrado y comprobar si pertenece o no a S). Después, esta prueba se repite N veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes y se toma la media de los resultados de todos los experimentos.

Por esto el método de Montecarlo se denomina a veces *método de pruebas estadísticas.*

La segunda peculiaridad consiste en que el error es, como regla, proporcional a la magnitud $\sqrt{D/N}$, donde D es una constante y N es el número de pruebas. Esta fórmula permite ver que para disminuir el error en 10 veces (en otras palabras, para obtener en el resultado otra cifra decimal exacta) es preciso aumentar N (o sea, el volumen del trabajo) en 100 veces.

Se pone de manifiesto la imposibilidad de alcanzar en este camino una elevada exactitud. Por eso suele decirse que el método de Montecarlo resulta especialmente eficaz en la solución de problemas en les cuales se necesita conocer el resultado con poca exactitud (del 5 al 10 por ciento).

Sin embargo, un mismo problema puede ser resuelto aplicando distintas variantes del método de Montecarlo [1]) a las que corresponden diferentes valores de D. En numerosos problemas se logra elevar considerablemente la exactitud escogiendo un procedimiento de cálculo al que le corresponde un valor mucho menor de D.

1.4. Problemas que permite resolver el método de Montecarlo. En primer lugar, el método de Montecarlo permite simular cualquier proceso cuya marcha depende de factores

---

Sin embargo, el método de Montecarlo expuesto en nuestro ejemplo permite con la misma facilidad calcular el «volumen multidimensional» de un cuerpo en un espacio multidimensional. Es más, sucede a menudo que el método de Montecarlo es en este caso el único método numérico que permite resolver el problema.

[1]) En la literatura especial con frecuencia se suele hablar ahora *de los métodos* de Montecarlo (en plural) para subrayar con ello que un mismo problema se puede resolver mediante la simulación de distintas variables aleatorias.

aleatorios. En segundo lugar, en muchos problemas matemáticos, que no tienen la menor relación con cuestiones aleatorias, se puede inventar un modelo probabilístico artificial (e incluso más de un modelo) que permite resolver estos problemas. En realidad, esto es lo que hemos hecho en el ejemplo del punto 1.2.

Por consiguiente, se puede hablar del método de Montecarlo como de un método universal en la solución de problemas matemáticos.

Es de especial interés el hecho de que en algunos casos conviene abandonar la simulación del proceso aleatorio real

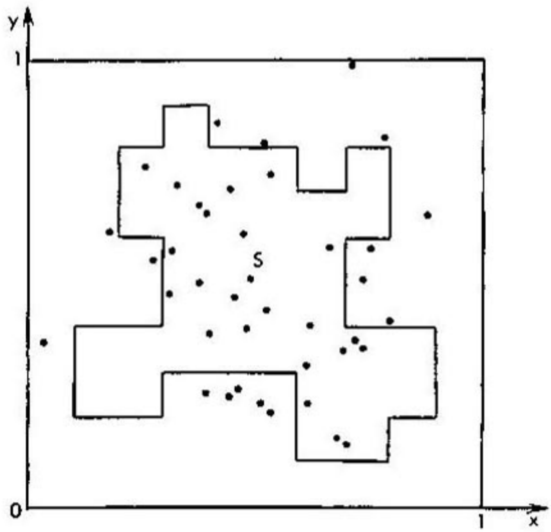


Fig. 2

y concentrarse en el análisis del modelo artificial. Una situación de este tipo es considerada en el § 7.

1.5. Algo más sobre el ejemplo. Volvamos al ejemplo del punto 1.2. Para poder realizar el cálculo debemos escoger en el cuadrado puntos aleatorios. ¿Cómo realizar esto?

Imaginemos el siguiente experimento. La fig. 1 (aumentada proporcionalmente), con la figura S y el cuadrado, se

coloca sobre un muro y sirve de blanco para un tirador que, situado a cierta distancia, dispara N veces apuntando al centro del cuadrado. Claro está que no todas las balas darán exactamente en el centro: perforarán el blanco en N puntos aleatorios [1]. ¿Es posible estimar el área de S a partir de estos puntos?

En la fig. 2 viene representado el resultado de un experimento semejante. En este experimento se tiene $N = 40$, $N' = 24$ y $N'/N = 0{,}60$ lo que representa casi el doble del valor exacto (0,35) del área. Por supuesto, tratándose de un tirador de gran puntería los resultados del experimento serán muy malos ya que casi todas las balas pegarán cerca del centro y perforarán S[2]).

Es fácil persuadirse de que el método que hemos aplicado para calcular el área tendrá validez sólo si los puntos aleatorios, además de ser aleatorios, estarán «distribuidos uniformemente» sobre el cuadrado. Para dar un sentido exacto a estas palabras es preciso estudiar la definición de variable aleatoria y algunas de sus propiedades. Estos conocimientos se exponen, sin demostración, en el § 2. El lector que haya leído cualquier curso de la Teoría de las probabilidades puede omitir por completo el § 2 a excepción del punto 2.5.

---

[1]) Aceptamos que el tirador está lejos de ser el campeón del mundo y se encuentra a una distancia suficientemente grande del blanco.

[2]) En el punto 4.5 explicaremos cómo han sido escogidos los puntos aleatorios en las figs. 1 y 2.

CAPÍTULO 1

SIMULACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS

§ 2. VARIABLES ALEATORIAS

Suponemos que el lector está más o menos familiarizado con el concepto de *probabilidad* y pasamos directamente al concepto de *variable aleatoria.*

Las palabras «variable aleatoria» suelen emplearse para subrayar que se ignora el valor concreto que tomará esta variable. Sucede también que estas palabras encierran incluso un desconocimiento de cuál es esta variable.

En cambio, el matemático emplea estas mismas palabras «variable aleatoria» dándoles un contenido positivo bien determinado. Efectivamente, dice él, no conocemos el valor que tomará esta variable en un caso concreto dado pero sabemos qué valores puede tomar y también las probabilidades de unos u otros valores. A base de estos datos no podemos predecir con exactitud el resultado de una prueba relacionada con esta variable aleatoria pero sí podemos prever con gran seguridad los resultados de un gran número de pruebas. Cuanto mayor sea el número de pruebas, mayor exactitud tendrán nuestras predicciones.

Es decir, para definir una variable aleatoria es preciso señalar los valores que puede tomar y las probabilidades de estos valores.

2.1. Variables aleatorias discretas. Se dice que la variable aleatoria ξ es *discreta* si puede tomar un conjunto discreto de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ [1]).

Una variable aleatoria discreta ξ se define mediante la tabla

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \qquad \text{(T)}$$

donde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ son los valores posibles de la variable ξ y $p_1, p_2, \ldots, p_n$ son las probabilidades que les corresponden. Hablando con más precisión, la probabilidad de

---

[1]) La Teoría de las probabilidades estudia también variables aleatorias discretas que pueden tomar un número infinito de valores.

que la variable aleatoria ξ tome el valor x_i (designaremos esta probabilidad por $\mathsf{P}\{\xi = x_i\}$) es igual a p_i:

$$\mathsf{P}\{\xi = x_i\} = p_i.$$

La tabla (T) se denomina *distribución de la variable aleatoria.*

Hablando en términos generales, los números $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ pueden ser cualesquiera. En cambio, las probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_n$ deben cumplir dos condiciones:

a) todos los números p_i deben ser positivos:

$$p_i > 0; \tag{1}$$

b) la suma de todos los p_i debe ser igual a 1:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1. \tag{2}$$

La última condición significa que ξ debe necesariamente tomar en cada caso uno de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Se denomina *esperanza matemática* de la variable aleatoria ξ el número.

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i. \tag{3}$$

Para aclarar el significado real de esta magnitud, la representaremos en la forma

$$\mathsf{M}\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i.$$

De aquí puede verse que $\mathsf{M}\xi$ es el *valor medio* de la variable ξ con la particularidad de que los valores x_i de mayor probabilidad figuran en la suma con pesos mayores [1]).

[1]) La media ponderada aparece con frecuencia en las más diversas ramas de la ciencia. Por ejemplo, en la Mecánica: si en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (del eje Ox) están concentradas las masas $m_1, m_2, \ldots, m_n$, la abscisa del centro de gravedad de este sistema se determina mediante la fórmula

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Por supuesto, la suma de todas las masas puede ser en este caso distinta de la unidad.

Señalemos las propiedades principales de la esperanza matemática: si c es una variable no aleatoria, se tiene

$$\mathbf{M}(\xi + c) = \mathbf{M}\xi + c, \tag{4}$$

$$\mathbf{M}(c\xi) = c\mathbf{M}\xi; \tag{5}$$

si ξ y η son dos variables aleatorias cualesquiera, se tiene

$$\mathbf{M}(\xi + \eta) = \mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\eta. \tag{6}$$

Se denomina *varianza* de la variable aleatoria ξ el número

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}[(\xi - \mathbf{M}\xi)^2]. \tag{7}$$

Por consiguiente, la varianza $\mathbf{D}\xi$ es la esperanza matemática del cuadrado de la desviación de la variable aleatoria ξ de su valor medio $\mathbf{M}\xi$. Es obvio que siempre se tiene $\mathbf{D}\xi > 0$.

La esperanza matemática y la varianza son las características numéricas más importantes de la variable aleatoria ξ. ¿Qué valor práctico tienen?

Supongamos que hemos observado varias veces la variable ξ obteniendo los valores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ (cada uno de los cuales es igual a uno de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$); entonces la media aritmética de estos valores será próxima a $\mathbf{M}\xi$

$$\frac{1}{N}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) \approx \mathbf{M}\xi \tag{8}$$

y la varianza $\mathbf{D}\xi$ caracterizará el esparcimiento de estos valores alrededor del valor medio $\mathbf{M}\xi$.

Empleando (4), (5) y (6) podemos dar otra forma a (7):

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}[\xi^2 - 2\mathbf{M}\xi\cdot\xi + \mathbf{M}\xi)^2] = \mathbf{M}(\xi^2) - 2\mathbf{M}\xi\cdot\mathbf{M}\xi + \mathbf{M}\xi)^2,$$

de donde

$$\mathbf{D}\xi = \mathbf{M}(\xi^2) - (\mathbf{M}\xi)^2. \tag{9}$$

Resulta más fácil, como regla, calcular la varianza aplicando la fórmula (9) en lugar de la fórmula (7).

Señalemos las propiedades principales de la varianza: si c es una variable no aleatoria, se tiene

$$\mathbf{D}(\xi + c) = \mathbf{D}\xi, \tag{10}$$

$$\mathbf{D}(c\xi) = c^2\mathbf{D}\xi. \tag{11}$$

En la Teoría de las probabilidades desempeña un papel importante el concepto de **independencia de variables aleatorias**. En realidad se trata de un concepto bastante complejo; pero en los casos más sencillos la cuestión se aclara fácilmente [1]).

Para dos variables aleatorias independientes ξ y η son válidas las relaciones

$$M(\xi\eta) = M\xi \cdot M\eta, \tag{12}$$

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta. \tag{13}$$

Ejemplo. Consideremos la variable aleatoria $\varkappa$ con la distribución siguiente

$$\varkappa = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}.$$

Es obvio que podemos realizar esta variable considerando el número de puntos que aparece al arrojar un dado: todos los valores son igualmente probables. Calculemos la esperanza matemática y la varianza de $\varkappa$. Según la fórmula (3), tenemos

$$M\varkappa = 1 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$$

Según la fórmula (9), tenemos

$$D\varkappa = M(\varkappa^2) - (M\varkappa)^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + 6^2 \cdot \frac{1}{6} - (3{,}5)^2 = 2{,}917.$$

Ejemplo. Consideremos la variable aleatoria θ con la distribución siguiente

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Podemos realizar esta variable considerando el juego de cara y cruz en el que a la cara le corresponden 3 puntos y a la cruz 4 puntos. En este caso tenemos

$$M\theta = 0{,}5 \cdot 3 + 0{,}5 \cdot 4 = 3{,}5;$$

$$D\theta = 0{,}5\,(3^2 + 4^2) - (3{,}5)^2 = 0{,}25.$$

Como vemos $M\theta = M\varkappa$ mientras que $D\theta < D\varkappa$. Lo último era de esperar ya que los valores de θ pueden diferir de 3,5 en $\pm$ 0,5 todo lo más mientras que la dispersión de los valores de $\varkappa$ puede alcanzar hasta $\pm$ 2,5.

2.2. Variables aleatorias continuas. Supongamos que en el origen de coordenadas del plano se encuentra una can-

[1]) Supongamos que además de la variable ξ estamos observando otra variable aleatoria η. Si la distribución de la variable ξ no se altera al conocerse el valor que ha tomado la variable η, es lógico decir que ξ no depende de η.

tidad determinada de radio. Todo átomo de radio emite al desintegrarse una partícula α. Su dirección puede ser caracterizada mediante el ángulo ψ (fig. 3). Tanto desde

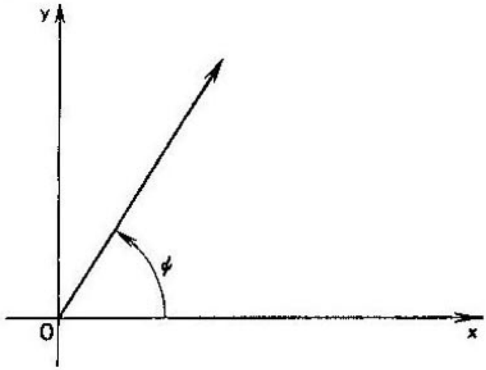


Fig. 3

el punto de vista teórico como práctico, la emisión es posible en cualquier dirección; por eso, esta variable aleatoria puede tomar cualquier valor comprendido entre 0 y 2π.

Diremos que una variable aleatoria ξ es *continua* si puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo (a, b).

Toda variable aleatoria continua ξ queda definida si se da el intervalo (a, b) que contiene los valores posibles de esta variable y la función $p(x)$ que lleva el nombre de *densidad de probabilidad* de la variable aleatoria ξ (o *densidad de distribución* de ξ).

El significado real de la función $p(x)$ es el siguiente: sea (a', b') un intervalo cualquiera contenido en (a, b) (es decir, sea $a \leqslant a'$ y $b' \leqslant b$); entonces la probabilidad de que ξ tome un valor perteneciente al intervalo (a', b') es igual a la integral

$$\mathsf{P}\{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx. \qquad (14)$$

El área sombreada en la fig. 4 es igual al valor de la integral (14).

El conjunto de los valores de ξ puede formar un intervalo cualquiera. Puede darse incluso el caso de que $a = -\infty$

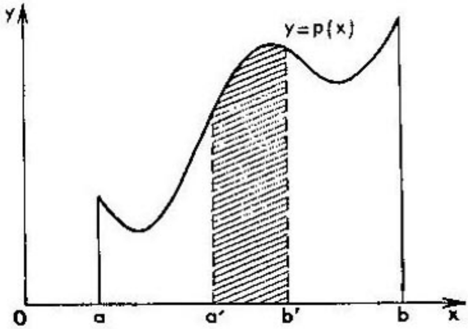


Fig. 4

y también el de que $b = \infty$. En cambio, la densidad $p(x)$ debe cumplir dos condiciones análogas a las condiciones (1) y (2) para las variables discretas:

a) la densidad $p(x)$ debe ser positiva:

$$p(x) > 0; \tag{15}$$

b) la integral de la densidad $p(x)$ correspondiente a todo el intervalo (a, b) debe ser igual a 1:

$$\int_a^b p(x)\,dx = 1. \tag{16}$$

Se denomina *esperanza matemática* de la variable aleatoria continua el número

$$\mathrm{M}\xi = \int_a^b xp(x)\,dx. \tag{17}$$

El significado de esta característica es el mismo que en el caso de una variable aleatoria discreta. Efectivamente,

puesto que

$$M\xi = \int_a^b xp(x)\,dx \Big/ \int_a^b p(x)\,dx,$$

es fácil ver que se trata del valor medio de ξ pues cualquier valor de ξ es un número x del intervalo (a, b) que aparece en la integral con el peso $p(x)$ [1]).

Todo lo expuesto en el punto 2.1, desde la fórmula (4) hasta la fórmula (13) inclusive, sigue siendo válido también para las variables aleatorias continuas; esto se refiere a la definición (7) de la varianza, a la fórmula (9) que se emplea para calcularla y a todas las propiedades de $M\xi$ y $D\xi$. La repitición huelga.

Mencionemos únicamente otra fórmula más que permite calcular la esperanza matemática de una función de ξ. Sea, como antes, $p(x)$ la densidad de probabilidad de la variable aleatoria ξ. Tomemos una función continua cualquiera $f(x)$ y consideremos la variable aleatoria $\eta = f(\xi)$. Se puede demostrar que

$$Mf(\xi) = \int_a^b f(x)\,p(x)\,dx. \qquad (18)$$

Cabe subrayar que, hablando en términos generales, $Mf(\xi) \neq f(M\xi)$.

Si la variable aleatoria γ está definida en el intervalo $(0, 1)$ y su densidad es $p(x) = 1$ (fig. 5), se dice que está *uniformemente distribuida en* $(0, 1)$.

Efectivamente, cualquiera que sea el intervalo (a', b') que se tome dentro de $(0, 1)$, la probabilidad de que γ tome un valor perteneciente al intervalo (a', b') es igual a

$$\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx = b' - a',$$

[1]) También en este caso podemos señalar una fórmula análoga de la Mecánica: si $\rho(x)$ es la densidad lineal de la barra $a \leqslant x \leqslant b$, la abscisa del centro de gravedad de la barra se calcula mediante la fórmula

$$\bar{x} = \int_a^b x\rho(x)\,dx \Big/ \int_a^b \rho(x)\,dx.$$

o sea, es igual a la longitud de este intervalo. En particular, si dividimos (0, 1) en un número arbitrario de intervalos

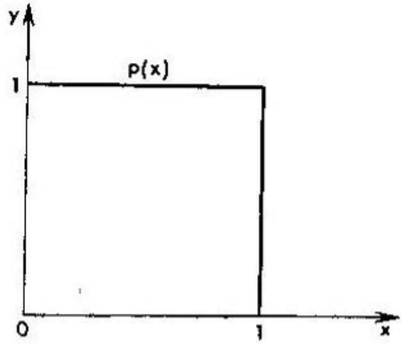


Fig. 5

de igual longitud, la probabilidad de que γ tome un valor perteneciente a cualquiera de estos intervalos será la misma.

Es fácil calcular que

$$\mathsf{M}\gamma = \int_0^1 xp(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$\mathsf{D}\gamma = \int_0^1 x^2 p(x)\,dx - (\mathsf{M}\gamma)^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

La variable aleatoria γ será empleada frecuentemente en lo sucesivo.

2.3. Variables aleatorias normales. Se da el nombre de variable aleatoria *normal* (o *gaussiana*) a toda variable aleatoria ζ que está definida en todo el eje $(-\infty, \infty)$ y que tiene la densidad

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{19}$$

donde a y $\sigma > 0$ son unos parámetros numéricos [1]).

[1]) σ es un número y no una variable aleatoria. Sin embargo, empleamos esta letra griega ya por tradición.

El parámetro a no influye en la forma de la curva $p(x)$: su variación sólo conduce a un desplazamiento de la curva a lo largo del eje x. En cambio, al variar σ sí se altera la forma de la curva. En efecto, es fácil ver que

$$\text{máx}\, p(x) = p(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}.$$

Si disminuimos σ, aumentará el máx $p(x)$. Pero toda el área que encierra la curva $p(x)$ es igual a 1 según (16). Por

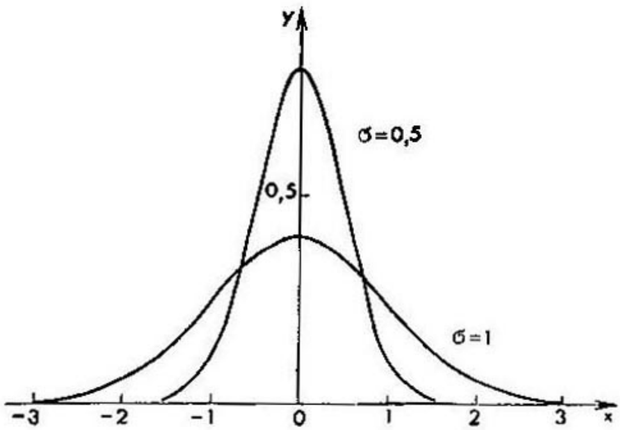


Fig. 6

eso, la curva tendrá que estirarse hacia arriba en una vecindad de $x = a$ y decrecer para todos los valores suficientemente grandes de x. En la fig. 6 hemos representado dos densidades normales correspondientes al caso $a = 0$ y $\sigma = 1$ y al caso $a = 0$ y $\sigma = 0{,}5$. (Otra densidad normal será construida en la fig. 21 de la página 54).

Se puede demostrar que

$$\mathsf{M}\zeta = a \text{ y } \mathsf{D}\zeta = \sigma^2.$$

Las variables aleatorias normales aparecen con gran frecuencia al analizar cuestiones de la más diversa índole. La razón de esto será explicada a continuación. Por ejemplo,

el error de medición δ es, como regla, una variable aleatoria normal. Si no existe error sistemático en las mediciones, se tiene $a = \mathsf{M}\delta = 0$. La magnitud $\sigma = \sqrt{\mathsf{D}\delta}$, llamada **error medio cuadrático**, caracteriza el error del método que se emplea para la medición.

La regla de «las tres sigmas». Es fácil calcular que

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} p(x)\,dx = 0{,}997$$

cualesquiera que sean a y σ en (19). De (14) resulta que

$$\mathsf{P}\,\{a - 3\sigma < \zeta < a + 3\sigma\} = 0{,}997. \qquad (20)$$

La probabilidad 0,997 es tan próxima a 1 que la última fórmula se interpreta a veces así: *al efectuar una prueba es prácticamente imposible obtener un valor de ζ que difiera de $\mathsf{M}\zeta$ en más de 3σ.*

2.4. Teorema central del límite en la Teoría de las probabilidades. Laplace fue el primero en enunciar este importante teorema. Varios matemáticos destacados, entre los cuales figuran P. L. Chébishev, A. A. Márkov y A. M. Liapunov, estudiaron sus generalizaciones. Su demostración es bastante compleja.

Consideremos N variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ independientes e idénticas de modo que las distribuciones de probabilidad de estas variables coinciden. Por consiguiente, también coinciden sus esperanzas matemáticas y varianzas.

Pongamos

$$\mathsf{M}\xi_1 = \mathsf{M}\xi_2 = \ldots = \mathsf{M}\xi_N = m,$$
$$\mathsf{D}\xi_1 = \mathsf{D}\xi_2 = \ldots = \mathsf{D}\xi_N = b^2.$$

Designemos por ρ_N la suma de todas estas variables:

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N.$$

De las fórmulas (6) y (13) se deduce que

$$\mathsf{M}\rho_N = \mathsf{M}\,(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) = Nm,$$
$$\mathsf{D}\rho_N = \mathsf{D}\,(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N) = Nb^2.$$

Consideremos ahora la variable aleatoria normal ζ_N con estos mismos parámetros: $a = Nm$ y $\sigma^2 = Nb^2$.

El teorema central del límite afirma que *cualquiera que sea el intervalo* (a', b') *se tiene para valores grandes de* N

$$\mathsf{P}\{a' < \rho_N < b'\} \approx \int_{a'}^{b'} p_{\zeta_N}(x)\,dx.$$

El significado real de este teorema es obvio: la suma ρ_N de una gran cantidad de variables aleatorias idénticas es aproximadamente normal $(p_{\rho_N}(x) \approx p_{\zeta_N}(x))$.

En realidad, este teorema es válido en situaciones mucho más generales: los sumandos $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ pueden no ser idénticos e independientes; lo que importa es sólo que cada sumando por separado no influya considerablemente en la suma.

Es este teorema el que explica porque las variables aleatorias normales aparecen con tanta frecuencia en la práctica. En efecto, siempre que tropezamos con el efecto sumario de una gran cantidad de factores aleatorios insignificantes, la variable aleatoria resultante es normal.

Por ejemplo, la desviación del proyectil respecto al objetivo es casi siempre una variable aleatoria normal por cuanto depende de las condiciones meteorológicas en las diferentes partes de la trayectoria y de otros muchos factores.

2.5. Esquema general de aplicación del método de Montecarlo. Supongamos que debemos calcular una magnitud m que desconocemos. Tratemos de idear una variable aleatoria ξ tal que $\mathsf{M}\xi = m$. Sea además $\mathsf{D}\xi = b^2$.

Consideremos N variables aleatorias independientes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ con la misma distribución que tiene ξ. Si N es suficientemente grande, la distribución de la suma $\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N$ será, según el teorema del punto 2.4, una distribución aproximadamente normal con los parámetros $a = Nm$ y $\sigma^2 = Nb^2$. De (20) se deduce que

$$\mathsf{P}\{Nm - 3b\sqrt{N} < \rho_N < Nm + 3b\sqrt{N}\} \approx 0{,}997.$$

Si dividimos entre N la desigualdad que figura entre las llaves, obtendremos una desigualdad equivalente; la probabilidad continuará siendo la misma:

$$\mathsf{P}\left\{m - \frac{3b}{\sqrt{N}} < \frac{\rho_N}{N} < m + \frac{3b}{\sqrt{N}}\right\} \approx 0{,}997.$$

Podemos representar este último resultado en la forma siguiente

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\xi_j-m\right|<\frac{3b}{\sqrt{N}}\right\}\approx 0{,}997. \qquad (21)$$

Ésta es una relación de suma importancia para el método de Montecarlo. Ofrece un método para calcular m y a la vez permite estimar el error.

En efecto, determinemos N valores de la variable aleatoria ξ [1]. Según la fórmula (21), la media aritmética de estos valores será igual aproximadamente a m. Con una elevada probabilidad podemos afirmar que el error de esta aproximación no pasa de $3b/\sqrt{N}$. Es obvio que el error tiende a cero cuando N crece.

§ 3. OBTENCIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS EN LAS *MCE*

El propio planteamiento de la cuestión («obtención de variables aleatorias en las *MCE*») provoca cierta perplejidad: ¿de qué casualidad se puede hablar si todo cuanto realiza la máquina debe ser programado de antemano?

En esta cuestión hay efectivamente ciertas sutilezas; pero conciernen más bien a la filosofía y, por eso, las dejaremos a un lado.

Sin embargo, cabe señalar que las variables aleatorias consideradas en el § 2 representan conceptos matemáticos ideales. Sólo la práctica dilucida si pueden ser empleados para describir determinados fenómenos de la naturaleza. Esta descripción es siempre aproximada. Es más, una variable aleatoria que describe satisfactoriamente una magnitud física en unos fenómenos, puede resultar una característica

[1]) Resulta lo mismo determinar un valor de cada una de las variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ o hallar N valores de la variable ξ ya que todas estas variables aleatorias son idénticas (tienen la misma distribución).

desafortunada de esta misma magnitud al tratarse de otros fenómenos.

De la misma forma, un camino que se asemeja a una recta (a una recta matemática ideal «sin anchura») en el mapa del país, se convierte en una franja sinuosa en el plano a gran escala de una localidad...

Suelen distinguirse tres procedimientos que se aplican para obtener variables aleatorias: tablas de números aleatorios, generadores de números aleatorios y el método de números seudoaleatorios.

3.1. Tablas de números aleatorios. Realicemos el experimento siguiente. Tomemos diez tarjetas iguales escribiendo en ellas las cifras 0, 1, 2, . . ., 9, metamos todas las tarjetas en un sombrero y, después de mezclarlas bien, comencemos a extraerlas, con la particularidad de que cada vez sacaremos una tarjeta solamente, la volveremos a meter en el sombrero y mezclaremos de nuevo todas las tarjetas. Las cifras así obtenidas pueden ser recogidas en una tabla semejante a la tabla A de la página 78 al final del libro (por razones de comodidad las cifras en la tabla A vienen agrupadas de cinco en cinco).

Esta tabla lleva el nombre de *tabla de números aleatorios* aunque sería más justo denominarla tabla de cifras aleatorias. Dicha tabla puede ser introducida en la memoria de la *MCE*. Cada vez que, durante los cálculos, necesitemos un valor de la variable aleatoria con la distribución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \ldots 9 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}1 \ldots 0{,}1 \end{pmatrix}, \qquad (22)$$

podemos tomar una tras otra las cifras de esta tabla.

La mayor tabla de números aleatorios publicada hasta el momento contiene 1 000 000 de cifras[1]). Por supuesto, fue obtenida empleando, en lugar del sombrero, una técnica más moderna: una ruleta electrónica. Un esquema elemental de esta ruleta aparece en la fig. 7 (el disco giratorio es parado en seco y se toma la cifra que señala la flecha).

Es preciso subrayar que no es tan fácil como parece obtener una tabla buena de números aleatorios. Todo aparato

[1]) RAND Corporation, A million random digits with 100 000 normal deviates, The Free Press, 1955.

físico real genera variables aleatorias cuyas distribuciones difieren ligeramente de la distribución ideal (22). Además, durante el experimento pueden surgir errores (por ejemplo, una de las tarjetas puede adherirse por cierto tiempo al forro). Por eso, las tablas obtenidas suelen comprobarse

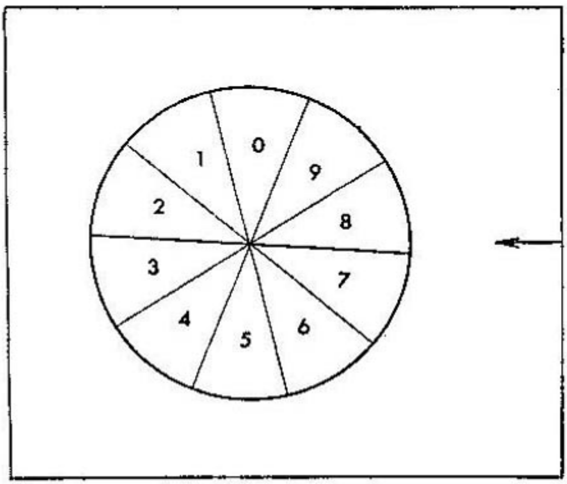


Fig. 7

minuciosamente a base de tests estadísticos especiales para ver si no hay contradicción entre unas u otras propiedades de grupos de números y la hipótesis de que estos números representan valores de la variable aleatoria (22).

Veamos uno de los tests más sencillos. Consideremos una tabla que contiene N cifras. Supongamos que el número de ceros en esta tabla es ν_0, el número de unos es ν_1, el número de doses es ν_2, etc. Calculemos la suma

$$\sum_{i=0}^{9} (\nu_i - 0{,}1N)^2.$$

La Teoría de las probabilidades permite predecir los límites entre los cuales puede estar comprendida esta suma que no puede ser excesivamente grande (por cuanto la espe-

ranza matemática de cada ν_i es igual a 0,1 N) ni excesivamente pequeña (ya que esto equivaldría a una «regularidad excesiva» en la distribución de los valores).

Las tablas de números aleatorios se emplean sólo cuando los cálculos correspondientes al método de Montecarlo se realizan a mano. Esto se debe a que todas las *MCE* poseen una memoria interna relativamente reducida en la que no se puede introducir una tabla grande. Por otra parte, tampoco conviene introducir la tabla en la memoria externa y recurrir constantemente a ella ya que esto afectaría considerablemente la velocidad del cálculo.

Sin embargo, no está excluido que, con el tiempo, la capacidad de memoria de las *MCE* aumente sensiblemente y entonces las tablas de números aleatorios resulten de gran utilidad.

3.2. Generadores de números aleatorios. La ruleta mencionada en el punto 3.1 podría, al parecer, combinarse con la computadora y emplearse para generar, según sea necesario, números aleatorios. Pero todo dispositivo mecánico resulta demasiado lento comparado con la *MCE*. Por eso, para generar variables aleatorias suelen emplearse los ruidos en las lámparas electrónicas: si durante un intervalo fijo Δt de tiempo el nivel del ruido sobrepasa el umbral escogido un número par de veces, se inscribe el cero; si esto ocurre un número impar de veces, se inscribe el uno[1]).

A primera vista, éste es un procedimiento muy cómodo. Imaginemos m generadores de este tipo que funcionan sin cesar paralelamente y envían ceros y unos aleatorios a todos los órdenes binarios de una célula especial. Cada ciclo corresponderá a un número de m órdenes. Durante el cálculo podemos dirigirnos en cualquier momento a esta célula y tomar de ella un valor de la variable aleatoria γ uniformemente distribuida en el intervalo (0, 1). Este valor, claro está, será aproximado y quedará representado por una fracción binaria de m órdenes $0,\ \alpha_{(1)}\alpha_{(2)}\ \ldots\ \alpha_{(m)}$, donde cada $\alpha_{(i)}$ imita la variable aleatoria con la distribución

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ ^1/_2 & ^1/_2 \end{pmatrix}$$

[1]) Existen procedimientos más perfectos.

Sin embargo, también este método tiene sus defectos. En primer lugar, es difícil comprobar la «calidad» de los números generados. Se hace necesario un control periódico ya que debido a distintos desarreglos puede surgir la así llamada «deriva en la distribución» (cuando los ceros y los unos en uno de los órdenes dejan de aparecer con la misma frecuencia). En segundo lugar, todos los cálculos en las *MCE* suelen realizarse dos veces para evitar intermitencias casuales. Pero, sin recurrir durante los cálculos a la memoria, es imposible reproducir los mismos números aleatorios y si recurrimos a la memoria, volvemos al caso de las tablas.

Generadores de este tipo resultarán útiles, sin duda, cuando comenzarán a construirse *MCE* especializadas, adaptadas a la solución de problemas por el método de Montecarlo. En las *MCE* universales, que raramente se aplican para los cálculos a base de números aleatorios, no es económico mantener y explotar un dispositivo especial. Resulta más conveniente emplear los así llamados *números seudoaleatorios.*

3.3. Números seudoaleatorios. Como quiera que la «calidad» de los números aleatorios empleados se controla mediante tests especiales, podemos no interesarnos por el procedimiento aplicado para obtenerlos exigiendo solamente que verifiquen el sistema de tests adoptado. Incluso podemos intentar calcularlos a partir de una fórmula dada. Por supuesto, debe ser una fórmula muy ingeniosa.

Los números que se obtienen a partir de una fórmula y que imitan los valores de la variable aleatoria γ se denominan *números seudoaleatorios.* La palabra «imitan» significa que estos números verifican una serie de tests como si fuesen valores de esta variable aleatoria.

El primer algoritmo destinado a la construcción de números seudoaleatorios fue propuesto por J. von Neumann y se conoce como *el método de centros de cuadrados.* Para explicarlo recurriremos a un ejemplo.

Consideremos el número $\gamma_0 = 0{,}9876$ formado por cuatro cifras. Al elevarlo al cuadrado obtendremos el número $\gamma_0^2 = 0{,}97535376$ de ocho cifras. Tomemos las cuatro cifras que aparecen en el centro de este número y pongamos $\gamma_1 = 0{,}5353$.

Elevando ahora γ_1 al cuadrado ($\gamma_1^2 = 0{,}28654609$), escojamos de nuevo las cuatro cifras del centro y pongamos $\gamma_2 =$

$= 0{,}6546$. Procediendo de la misma forma, tendremos $\gamma_2^2 = 0{,}42850116$, $\gamma_3 = 0{,}8501$; $\gamma_3^2 = 0{,}72267001$, $\gamma_4 = 0{,}2670$; $\gamma_4^2 = 0{,}07128900$, $\gamma_5 = 0{,}1289$, etc.[1]).

Pero este método no puede considerarse satisfactorio pues da más números pequeños de lo que se necesita. Por eso, fueron desarrollados por distintos científicos otros algoritmos. Algunos se basan en las particularidades de las *MCE* concretas. A título de ejemplo, consideremos uno de estos algoritmos empleado en la *MCE Strelá*.

Ejemplo. [2]). Strelá es una *MCE* de tres direcciones con coma flotante. La célula en la que se inscribe el número x consta de 43 órdenes binarios (fig. 8). La computadora opera con números binarios en forma normalizada: $x = \pm q \cdot 2^{\pm p}$, donde p es el orden y q la mantisa del

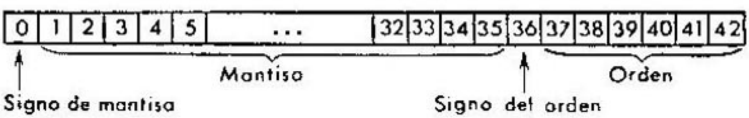


Fig. 8

número. En el orden j-ésimo de la célula puede figurar un cero o un uno; representemos por ε_j esta variable. Entonces

$$q = \frac{\varepsilon_1}{2^1} + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \ldots + \frac{\varepsilon_{35}}{2^{35}} \quad \text{y}$$

$$p = \varepsilon_{37} 2^5 + \varepsilon_{38} 2^4 + \ldots + \varepsilon_{42} 2^0.$$

La condición de normalización $0{,}5 \leqslant q < 1$ significa que ε_1 es siempre igual a 1. El signo « + » se representa por el cero y el signo «—» por el uno.

El número γ_{k+1} se obtiene del número γ_k realizando tres operaciones:

1) γ_k se multiplica por una constante grande que, como regla, se toma igual a 10^{17};

---

[1]) Podemos resumir este algoritmo en la fórmula $\gamma_{k+1} = F(\gamma_k)$, donde F representa el conjunto de operaciones que debemos realizar con el número γ_k para obtener γ_{k+1}. El número γ_0 es un número dado.

[2]) Véase *И. М. Соболь*, Псевдослучайные числа для машины *Стрела*, Теория вероятности и ее применения, 3, № 2 (1958), 205—211 (I. M. Sóbol, Números seudoaleatorios para la computadora *Strelá*; en la revista «Teoría de las probabilidades y sus aplicaciones», 3, nº 2 (1958), pág. de 205 a 211).

2) la imagen del producto $10^{17}\gamma_k$ se desplaza en siete órdenes hacia la izquierda (de modo que los siete primeros órdenes del producto desaparecen mientras que en los órdenes del 36 al 42 aparecen ceros);

3) se toma el valor absoluto del número obtenido (después de normarlo) que será precisamente γ_{k+1}.

Si arrancamos de $\gamma_0 = 1$, este proceso permite obtener más de 80 000 números diferentes γ_k; después en la sucesión surge un período y los números comienzan a repetirse. Diferentes controles de los 50 000 primeros números han dado resultados plenamente satisfactorios. Estos números se han empleado más de una vez para la solución de diversos problemas.

Las ventajas del método de números seudoaleatorios son evidentes. En primer lugar, para obtener un número basta realizar unas cuantas operaciones sencillas y gracias a esto la velocidad de generación de números aleatorios es del mismo orden que la velocidad de funcionamiento de la *MCE*. En segundo lugar, el programa ocupa sólo unas cuantas células de la memoria. En tercer lugar, cualquiera de los números γ_k puede ser reproducido fácilmente. Por último, basta comprobar una vez solamente la «calidad» de esta sucesión para poder aplicarla después reiteradamente y con seguridad en la solución de problemas semejantes.

El método tiene sólo un defecto: la «reserva» de los números seudoaleatorios es limitada. Pero existen procedimientos que permiten obtener una cantidad mucho mayor de números. En particular, se pueden variar los números iniciales γ_0. Actualmente los cálculos en los que se emplea el método de Montecarlo se realizan, en su aplastante mayoría, aprovechando los números seudoaleatorios. (Véanse informaciones complementarias en le § 10).

§ 4. TRANSFORMACIONES DE VARIABLES ALEATORIAS

En la solución de diferentes problemas tropezamos con la necesidad de simular distintas variables aleatorias. En las etapas iniciales del desarrollo del método de Montecarlo los investigadores intentaban obtener cada variable aleatoria construyendo una ruleta apropiada. Por ejemplo, para hallar los valores de la variable aleatoria con la distribución

siguiente

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}125 & 0{,}125 \end{pmatrix} \qquad (22')$$

se puede emplear la ruleta representada en la fig. 9 que funciona igual que la ruleta de la fig. 7, pero no está dividida uniformemente sino en partes proporcionales a las p_i.

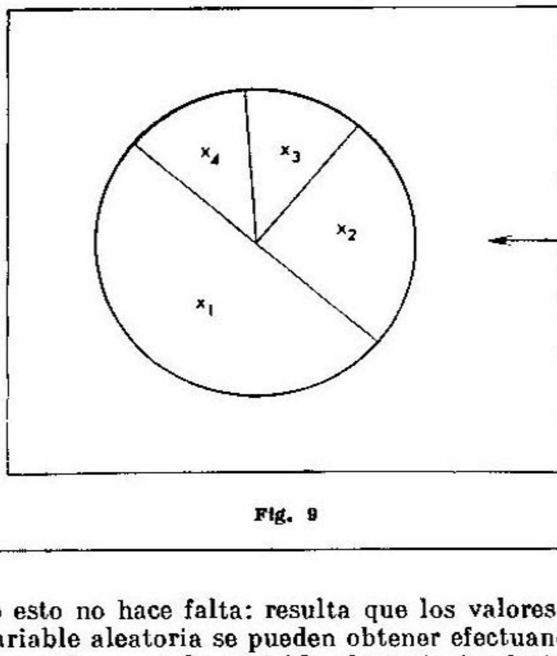


Fig. 9

Pero esto no hace falta: resulta que los valores de cualquier variable aleatoria se pueden obtener efectuando transformaciones de una sola variable aleatoria (es decir, de una variable «standard»). Suele emplearse con este fin la variable aleatoria γ uniformemente distribuida en el intervalo (0, 1). Conocemos ya cómo se obtienen los valores de γ.

Denominaremos *sorteo* de la variable aleatoria ξ el proceso de determinación de un valor de esta variable aleatoria ξ mediante la transformación de uno o varios valores de γ.

4.1. Sorteo de una variable aleatoria discreta. Supongamos que es preciso obtener valores de la variable aleatoria ξ

con la distribución

$$\xi = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$

Consideremos el intervalo $0 < y < 1$ dividiéndolo en n intervalos de longitudes $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Es evidente que las coordenadas de los puntos de división serán $y = p_1$, $y = p_1 + p_2$, $y = p_1 + p_2 + p_3, \ldots,$ $y = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$. Indiquemos con las cifras 1, 2, ..., n los

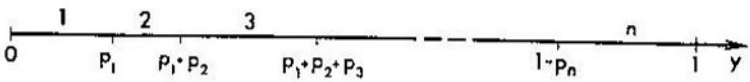


Fig. 10

intervalos obtenidos (fig. 10). Con esto concluyen los preparativos del sorteo de ξ. Cada vez que tengamos que «realizar un experimento» y sortear el valor de ξ, tomaremos un valor de γ y construiremos el punto $y = \gamma$. Si este punto aparece en el intervalo correspondiente al número i, aceptaremos que $\xi = x_i$ (en este experimento).

Es muy fácil argumentar la legitimidad de este procedimiento. En efecto, puesto que la variable aleatoria γ está uniformemente distribuida en (0, 1), la probabilidad de que γ pertenezca a uno de los intervalos es igual a la longitud del mismo. Por consiguiente,

$$\mathsf{P}\{0 < \gamma < p_1\} = p_1.$$
$$\mathsf{P}\{p_1 < \gamma < p_1 + p_2\} = p_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathsf{P}\{p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1} < \gamma < 1\} = p_n.$$

Según nuestro método, tomamos $\xi = x_i$ cuando

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{i-1} < \gamma < p_1 + p_2 + \ldots + p_i$$

y la probabilidad de ello es igual a p_i.

Por supuesto, al emplear la *MCE* podemos pasarnos sin la fig. 10. Supongamos que tanto los números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como las probabilidades $p_1, p_1 + p_2, p_1 + p_2 + p_3, \ldots, 1$

han sido introducidos uno tras otro en la memoria. En la fig. 11 de la pág. siguiente representamos el esquema sinóptico del subprograma de sorteo de ξ.

Ejemplo. Sortéense 10 valores de la variable aleatoria con la distribución

$$\theta = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0{,}58 & 0{,}42 \end{pmatrix}.$$

Escojamos los valores de γ tomando pares de cifras de la tabla A (pág. 78) multiplicados por 0,01 [1]. Es decir, $\gamma = 0{,}86$; 0,51; 0,59; 0,07; 0,95; 0,66; 0,15; 0,56; 0,64; 0,34.

Según nuestro esquema, los valores de γ menores que 0,58 corresponden a $\theta = 3$ mientras que los valores $\gamma \geqslant 0{,}58$ corresponden a $\theta = 4$; de modo que obtenemos los valores siguientes: $\theta = 4$; 3; 4; 3; 4; 4; 3; 3; 4; 3.

Cabe subrayar que el orden de numeración de los valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en la distribución de ξ puede ser arbitrario pero debe fijarse antes de comenzar el sorteo.

4.2. Sorteo de una variable aleatoria continua. Supongamos ahora que debemos obtener valores de una variable aleatoria ξ distribuida con la densidad $p(x)$ en el intervalo (a, b).

Demostremos que los valores de ξ se pueden determinar de la ecuación

$$\int_a^{\xi} p(x)\, dx = \gamma, \tag{23}$$

o sea, que escogido ya el valor de γ es preciso revolver la ecuación (23) para hallar el valor de ξ.

Para demostrar esta afirmación consideremos la función

$$y = \int_a^{x} p(x)\, dx.$$

[1]) Puesto que en este ejemplo los valores de p_1 tienen dos cifras decimales, basta tomar los valores de γ con dos cifras decimales. Aceptado este grado de aproximación, se nos puede dar el caso de $\gamma = 0{,}58$ que debe ser agregado al caso de $\gamma > 0{,}58$ (ya que el valor $\gamma = 0{,}00$ es posible mientras que el valor $\gamma = 1{,}00$ es imposible). Si empleamos para γ números con varias cifras decimales, el caso $\gamma = p_1$ se hace poco probable y puede ser agregado a cualquiera de las desigualdades.

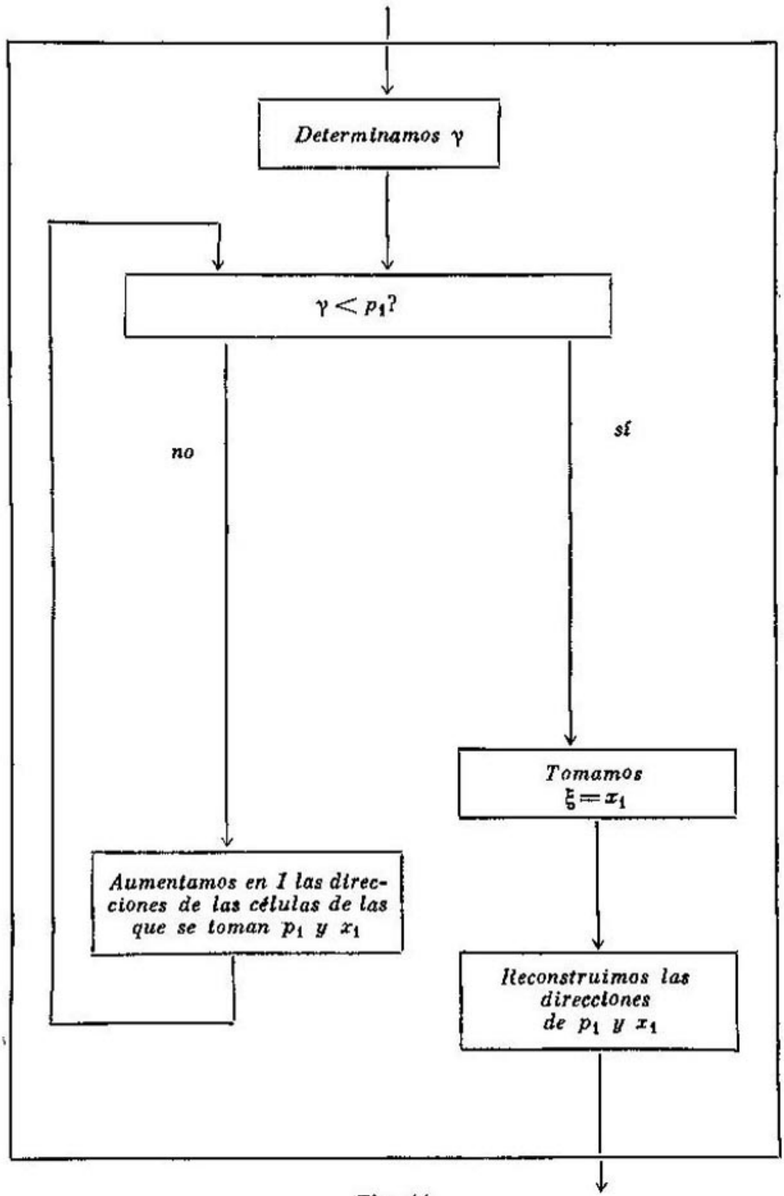

Determinamos γ
γ < p₁?
no
sí
Tomamos ξ = x₁
Aumentamos en 1 las direcciones de las células de las que se toman p₁ y x₁
Reconstruimos las direcciones de p₁ y x₁

Fig. 11

De las propiedades generales (15) y (16) de la densidad resulta que

$$y\ (a) = 0,\ y\ (b) = 1$$

y que la derivada

$$y'\ (x) = p\ (x) > 0.$$

Por lo tanto, la función $y\ (x)$ crece monótonamente del 0 al 1 (fig. 12). Debido a esto, toda recta $y = \gamma$, donde $0 < < \gamma < 1$, corta el gráfico de $y = y\ (x)$ en un punto único

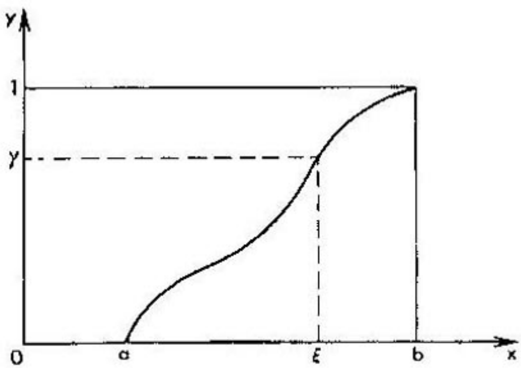


Fig. 12

cuya abscisa se toma precisamente igual a ξ. Es decir, la ecuación (23) tiene siempre solución y esta solución es única.

Tomemos ahora un intervalo arbitrario $(a',\ b')$ contenido en $(a,\ b)$. A los puntos

$$a' < x < b'$$

de este intervalo les corresponden las ordenadas de la curva $y = y\ (x)$ que satisfacen la desigualdad

$$y\ (a') < y < y\ (b').$$

Por eso si ξ pertenece al intervalo $a' < x < b'$, resulta que γ pertenece al intervalo $y\ (a') < y < y\ (b')$ y viceversa

(fig. 13). Luego

$$\mathsf{P}\{a' < \xi < b'\} = \mathsf{P}\ \{y\,(a') < \gamma < y\,(b')\}.$$

Puesto que γ está uniformemente distribuida en $(0, 1)$, tenemos

$$\mathsf{P}\ \{y\,(a') < \gamma < y\,(b')\} = y\,(b') - y\,(a') = \int_{a'}^{b'} p\ (x)\,dx.$$

Es decir,

$$\mathsf{P}\ \{a' < \xi < b'\} = \int_{a'}^{b'} p\ (x)\,dx;$$

pero esto significa precisamente que la variable aleatoria

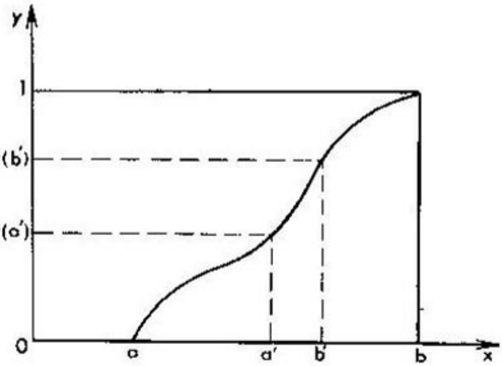


Fig. 13

ξ, raíz de la ecuación (23), tiene la densidad de probabilidad $p\ (x)$.

Ejemplo. Se dice que la variable aleatoria η está *uniformemente distribuida en el intervalo* (a, b) si su densidad es constante en este intervalo:

$$p\,(x) = \frac{1}{b-a} \quad \text{para} \quad a < x < b.$$

Para sortear los valores de η formamos la ecuación (23):

$$\int_a^\eta \frac{dx}{b-a} = \gamma.$$

La integral se calcula fácilmente y resulta

$$\frac{\eta - a}{b - a} = \gamma,$$

de donde obtenemos una expresión explícita para η:

$$\eta = a + \gamma (b - a). \tag{24}$$

Otros ejemplos de aplicación de la fórmula (23) pueden verse en los puntos 5.2 y 8.3.

4.3. Método de Neumann para el sorteo de una variable aleatoria continua. Puede resultar que sea muy difícil resolver la ecuación (23) respecto a ξ; por ejemplo, si la integral de $p(x)$ no se expresa en funciones elementales o si la densidad $p(x)$ viene dada gráficamente.

Supongamos que la variable aleatoria ξ está definida en un intervalo finito (a, b) y que su densidad está acotada (fig. 14):

$$p(x) \leqslant M_0.$$

Los valores de ξ se pueden sortear de la siguiente manera

1) se escogen dos valores γ' y γ'' de la variable aleatoria γ y se considera el punto aleatorio $\Gamma(\eta', \eta'')$ con las coordenadas

$$\eta' = a + \gamma'(b - a) \text{ y } \eta'' = \gamma'' M_0;$$

2) si el punto Γ aparece por debajo de la curva $y = p(x)$, tomamos $\xi = \eta'$; si el punto Γ aparece por encima de la curva $y = p(x)$, retiramos de la consideración el par (γ', γ'') y escogemos un par nuevo de valores (γ', γ'').

La argumentación de este método viene en el punto 9.1.

4.4. Sobre el sorteo de variables normales. Existe una gran variedad de procedimientos que se aplican para sortear distintas variables aleatorias. No nos detendremos en ello. Suelen emplearse sólo si los métodos de los puntos 4.2 y 4.3 resultan poco efectivos.

En particular, esto ocurre en el caso de la variable aleatoria normal ζ ya que la ecuación

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\zeta} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\gamma$$

no admite solución explícita y el intervalo de los valores posibles de ζ es infinito.

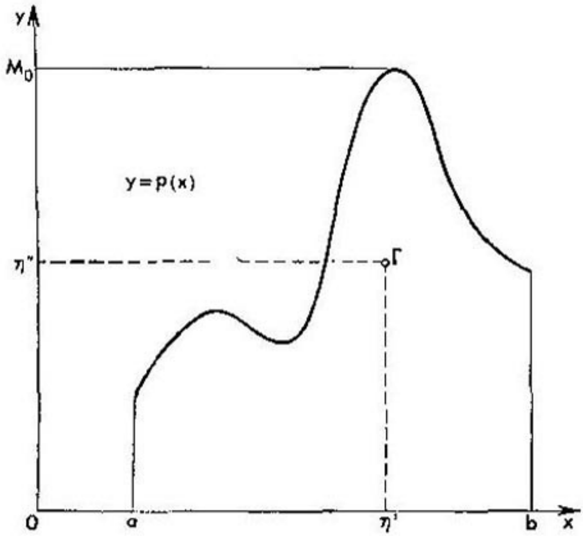


Fig. 14

La tabla B que viene al final del libro (en la pág. 78) contiene valores (ya sorteados) de la variable aleatoria normal ζ con la esperanza matemática $\mathsf{M}\zeta=0$ y la varianza $\mathsf{D}\zeta=1$. Es fácil demostrar[1]) que la variable aleatoria

$$\zeta'=a+\sigma\zeta \tag{25}$$

también será normal; además, de (10) y (11) se deduce que

$$\mathsf{M}\zeta'=a \text{ y } \mathsf{D}\zeta'=\sigma^2.$$

[1]) La demostración viene en el punto 9.2.

Por consiguiente, la fórmula (25) permite, empleando la tabla B, sortear valores de cualesquiera variables normales.

4.5. Otra vez sobre el ejemplo del punto 1.2. Ahora podemos explicar cómo se han escogido los puntos aleatorios en las figuras 1 y 2. En la fig. 1 hemos construido los puntos con las coordenadas

$$x = \gamma' \text{ e } y = \gamma''.$$

Los valores γ' y γ'' se han calculado a base de los grupos de cinco cifras de la tabla A: $x_1 = 0{,}86515$, $y_1 = 0{,}90795$; $x_2 = 0{,}66155$, $y_2 = 0{,}66434$, etc.

Se puede demostrar[1]) que, debido a que las abscisas y las ordenadas de nuestros puntos son independientes, la probabilidad de que uno de estos puntos aparezca en una región cualquiera interior del cuadrado es igual al área de esta región. En otras palabras, los puntos están uniformemente distribuidos en el cuadrado.

En la fig. 2 hemos construido los puntos con las coordenadas

$$x = 0{,}5 + 0{,}2\zeta' \text{ e } y = 0{,}5 + 0{,}2\zeta''$$

con la particularidad de que los valores ζ' y ζ'' se toman de la tabla B uno tras otro:

$$x_1 = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}2005, \quad y_1 = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 1{,}1922;$$
$$x_2 = 0{,}5 + 0{,}2 \cdot (-0{,}0077), \ldots$$

Un punto no se ha considerado por quedar fuera del cuadrado.

De la fórmula (25) se deduce que las abscisas y las ordenadas de estos puntos representan variables aleatorias normales con la esperanza matemática $a = 0{,}5$ y la varianza $\sigma^2 = 0{,}04$

[1]) La demostración viene en el punto 9.3.

CAPÍTULO 2

EJEMPLOS DE APLICACIÓN DEL MÉTODO DE MONTECARLO

§ 5. ANÁLISIS DE UN SISTEMA DE SERVICIOS

5.1. Descripción del problema. Consideremos uno de los sistemas más sencillos de servicios. Consta de n líneas (canales o centros de servicio), cada una de las cuales se puede emplear para «atender a los consumidores». El sistema recibe pedidos, con la particularidad de que los momentos de recepción son aleatorios. Todo pedido va a la línea número 1. Si en el momento de recepción del k-ésimo pedido (designemos este momento por T_k) la línea está libre, comienza a cumplir el pedido durante un tiempo t_{oc} (t_{oc} es *el tiempo de ocupación de la línea*). Si en el momento T_k la línea número 1 está ocupada, el pedido se transmite instantáneamente a la línea número 2, etc. Por último, si en el momento T_k resultan ocupadas todas las líneas, el sistema rechaza el pedido.

Es preciso determinar el promedio de pedidos que atenderá y rechazará el sistema durante un tiempo T.

Está claro que semejantes problemas pueden surgir al analizar el funcionamiento de cualquier empresa y no sólo de las empresas de servicios. En algunos casos muy especiales se logra la solución analítica. Pero, en casos complejos (de los que trataremos más tarde), el método de Montecarlo constituye el único método de cálculo.

5.2. Flujo elemental de pedidos. El primer problema que se plantea al analizar sistemas de este tipo es: ¿qué representa el flujo de pedidos? Este problema se resuelve de manera experimental a base de un estudio suficientemente prolongado de los pedidos. El análisis de los flujos de pedidos, correspondientes a distintas condiciones, ha permitido destacar algunos casos que suelen darse con suficiente frecuencia.

Un flujo de pedidos se denomina *flujo elemental* (o *flujo de Poisson*) si el intervalo de tiempo τ que transcurre entre dos pedidos sucesivos representa una variable aleatoria

distribuida en el intervalo $(0, \infty)$ con la densidad

$$p(x) = ae^{-ax}. \qquad (26)$$

La ley (26) lleva también el nombre de *distribución exponencial* (véase la fig. 15, donde hemos representado las densidades (26) para $a = 1$ y $a = 2$).

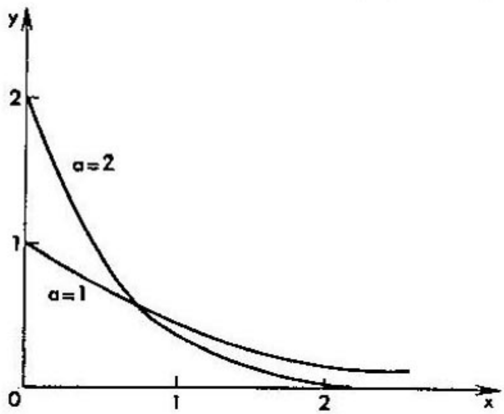


Fig. 15

Es fácil calcular la esperanza matemática de τ:

$$M\tau = \int_0^\infty xp(x)\,dx = \int_0^\infty xae^{-ax}\,dx.$$

Integrando por partes ($u = x$ y $dv = ae^{-ax}dx$), obtenemos

$$M\tau = [-xe^{-ax}]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\right]_0^\infty = \frac{1}{a}.$$

El parámetro a se denomina *densidad del flujo de pedidos*.

La fórmula correspondiente al sorteo de τ se obtiene fácilmente de la ecuación (23) que tiene en nuestro caso la forma

$$\int_0^\tau ae^{-ax}\,dx = \gamma.$$

Calculando la integral del primer miembro, obtenemos la relación

$$1-e^{-a\tau}=\gamma,$$

de donde resulta

$$\tau=-\frac{1}{a}\ln(1-\gamma).$$

Como quiera que la variable $1-\gamma$ tiene la misma distribución que γ, podemos emplear en lugar de la última fórmula esta otra

$$\tau=-\frac{1}{a}\ln\gamma. \qquad (27)$$

5.3. Esquema de cálculo. Consideremos, pues, el funcionamiento del sistema descrito en el punto 5.1 en el caso de un flujo elemental de pedidos.

Pongamos cada línea en correspondencia con una célula de la memoria interior de la *MCE* inscribiendo en la célula el momento en que queda libre la línea. Sea t_i el momento en que queda libre la i-ésima línea. Aceptaremos que los cálculos se inician en el momento $T_1 = 0$ en el que se recibe el primer pedido. Podemos aceptar que en este momento todos los t_i son iguales a T_1 ya que todas las líneas están libres. El tiempo final del cálculo será $T_{\text{fin}} = T_1 + T$.

El primer pedido va a la línea número 1. Por consiguiente, esta línea permanecerá ocupada durante el tiempo t_{oc}. Por eso, debemos tomar en lugar de t_1 el valor nuevo $(t_1)_{\text{nv}} = T_1 + t_{\text{oc}}$, agregar uno al contador de los pedidos cumplidos y pasar a considerar el segundo pedido.

Supongamos que hemos considerado ya k pedidos. Debemos entonces sortear el momento de recepción del $(k+1)$-ésimo pedido. Con este fin escogemos el valor siguiente de γ y calculamos, a partir de la fórmula (27), el valor siguiente $\tau=\tau_k$; después determinamos el momento de recepción

$$T_{k+1}=T_k+\tau_k.$$

¿Estará libre para este momento la primera línea? Para responder, debemos comprobar la condición

$$t_1\leqslant T_{k+1}. \qquad (28)$$

Si esta condición se cumple, ello significa que en el momento T_{k+1} la línea está ya libre y puede cumplir el pedido. Deberemos sustituir t_1 por $T_{k+1}+t_{\text{oc}}$, agregar uno al contador

de pedidos cumplidos y pasar a considerar el pedido siguiente.

Si la condición (28) no se cumple, ello significa que la primera línea está ocupada en el momento T_{k+1}. Comprobamos entonces si está o no libre la segunda línea:

$$t_2 \leqslant T_{k+1}. \tag{29}$$

Si se cumple la condición (29), sustituimos t_2 por $T_{k+1} + t_{oc}$, agregamos uno al contador de pedidos cumplidos y pasamos a considerar el pedido siguiente.

Si la condición (29) no se cumple, comprobamos la condición

$$t_3 \leqslant T_{k+1}.$$

Puede ocurrir que para todo i del 1 al n se tenga

$$t_i > T_{k+1},$$

o sea, puede suceder que todas las líneas estén ocupadas en el momento T_{k+1}. En este caso, agregamos uno al contador de pedidos rechazados y pasamos a considerar el pedido siguiente.

Cada vez que calculemos T_{k+1}, deberemos comprobar además la condición de finalización del experimento

$$T_{k+1} > T_{fin}.$$

Si esta condición se cumple, finalizamos el experimento. En los contadores de pedidos cumplidos y de pedidos rechazados tendremos entonces los números μ_{cum} y μ_{rech}.

Este experimento se repite N veces (empleando distintos valores de γ) y se toma la media de los resultados encontrados

$$\mathsf{M}\mu_{cum} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_{cum\,(j)},$$

$$\mathsf{M}\mu_{rech} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mu_{rech\,(j)},$$

donde $\mu_{cum\,(j)}$ y $\mu_{rech\,(j)}$ representan los valores de μ_{cum} y de μ_{rech} en el j-ésimo experimento.

En la fig. 16 aparece el esquema sinóptico del programa correspondiente a este cálculo (si es necesario, podemos obte-

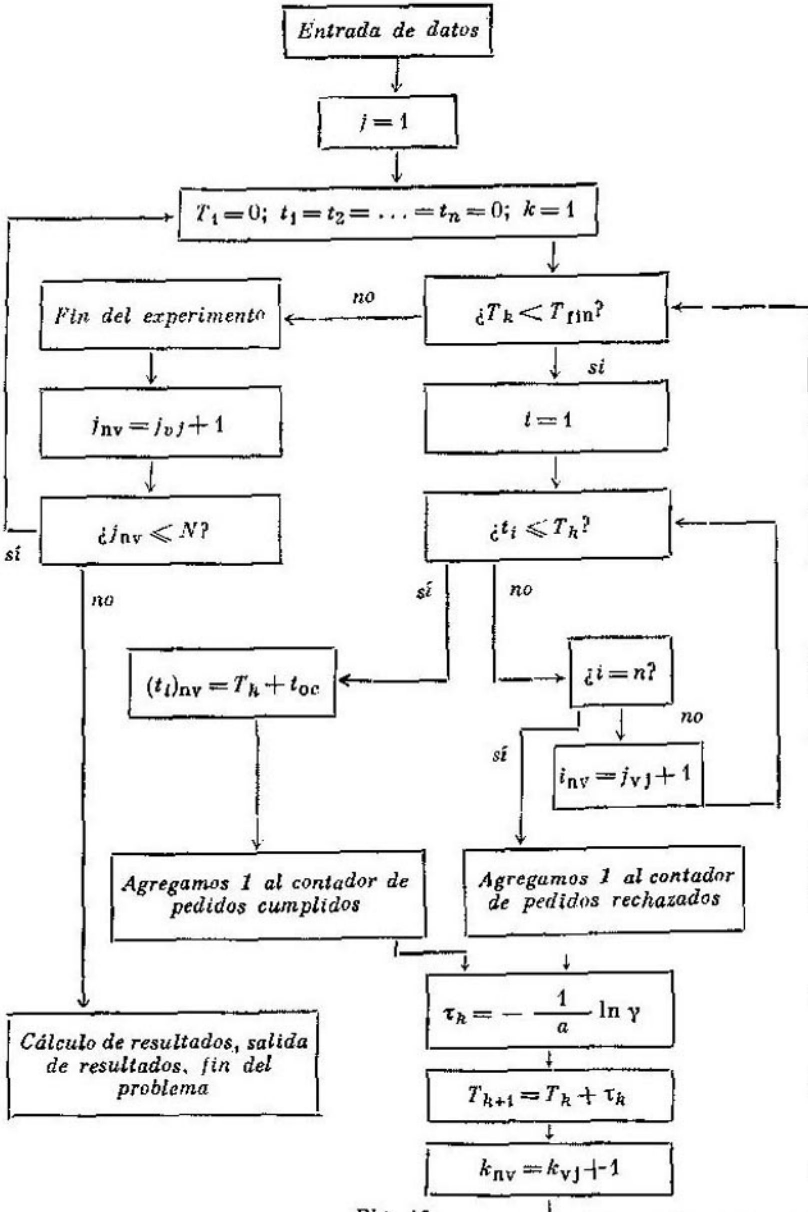

Entrada de datos
$j=1$
$T_1=0;\ t_1=t_2=\ldots=t_n=0;\ k=1$
¿$T_k<T_{\text{fin}}$?
no
sí
Fin del experimento
$j_{\text{nv}}=j_{\text{vj}}+1$
¿$j_{\text{nv}}\leqslant N$?
sí
no
$i=1$
¿$t_i\leqslant T_k$?
sí
no
$(t_i)_{\text{nv}}=T_k+t_{\text{oc}}$
¿$i=n$?
sí
no
$i_{\text{nv}}=j_{\text{vj}}+1$
Agregamos 1 al contador de pedidos cumplidos
Agregamos 1 al contador de pedidos rechazados
$\tau_k=-\frac{1}{a}\ln\gamma$
$T_{k+1}=T_k+\tau_k$
$k_{\text{nv}}=k_{\text{vj}}+1$
Cálculo de resultados, salida de resultados, fin del problema

Fig. 16

ner en la sección «Fin del experimento» los valores de $\mu_{cum\,(j)}$ y de $\mu_{rech\,(j)}$ que resultan en cada uno de los experimentos).

5.4. Problemas más complejos. Es fácil persuadirse de que este mismo método se puede aplicar en sistemas mucho más complejos.

Por ejemplo, t_{oc} puede ser una variable aleatoria, y no una magnitud constante, y tomar diferentes valores para distintas líneas (lo que significa que las líneas se distinguen por sus equipos o por la calificación del personal). El esquema de cálculo, en esencia, continuará siendo el mismo, pero habrá que sortear cada vez los valores de t_{oc} correspondiendo a cada línea una fórmula de sorteo propia.

También se pueden considerar los llamados *sistemas con espera* que, en lugar de rechazar inmediatamente el pedido que no pueden cumplir, lo conservan durante cierto tiempo t_p (*tiempo de permanencia del pedido en el sistema*); si en el transcurso de este tiempo se libera una de las líneas, dicha línea atiende el pedido.

Además se pueden considerar sistemas en los que el pedido en turno es atendido por la línea que se libera antes que otras. Por otra parte, es factible tomar en consideración las intermitencias aleatorias de las líneas, el tiempo aleatorio de reparación de las mismas, la variación según el tiempo de la densidad del flujo de pedidos y otros muchos factores.

Por supuesto, el análisis de estos sistemas exige determinados esfuerzos. Para obtener resultados de valor práctico debe ser ideado un modelo correcto. Esto requiere un estudio suficientemente minucioso de los flujos reales de pedidos, el cronometraje del funcionamiento de las secciones del sistema, etc.

Hablando en términos generales, es preciso conocer las leyes probabilísticas de funcionamiento de las secciones del sistema. En este caso, el método de Montecarlo permite hallar las leyes probabilísticas del funcionamiento de todo el sistema por complejo que sea.

Estos métodos de análisis resultan muy útiles cuando se trata de proyectar una empresa: en lugar de realizar un experimento real costoso (y a veces imposible de realizar), podemos experimentar en la *MCE* simulando distintas variantes de organización del trabajo o del empleo de los equipos.

§ 6. ANÁLISIS DE LA CALIDAD Y DE LA SEGURIDAD DE PIEZAS

6.1. Esquema elemental de análisis de la calidad. Consideremos una pieza S que consta de cierta cantidad (posiblemente grande) de elementos. Por ejemplo, si S es un aparato eléctrico, sus elementos pueden ser las resistencias ($R_{(k)}$), las capacidades ($C_{(k)}$), las lámparas, etc. Supongamos que

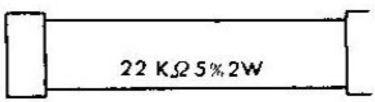


Fig. 17

la calidad se determina por un parámetro U que puede ser calculado si se conocen los parámetros de todos los elementos

$$U = f\,(R_{(1)},\ R_{(2)},\ \ldots;\ C_{(1)},\ C_{(2)},\ \ldots;\ \ldots). \qquad (30)$$

Por ejemplo, si U es la tensión en una sección de un circuito eléctrico, podemos considerar, basándonos en la ley de Ohm, las ecuaciones del circuito y determinar U de estas ecuaciones.

Sin embargo, los valores reales de los parámetros de los elementos difieren de los valores nominales. Por ejemplo, la resistencia representada en la fig. 17 puede tomar un valor cualquiera comprendido entre 20,9 y 23,1 kΩ.

Surge la cuestión siguiente: ¿cómo influyen en el valor de U las desviaciones que se observan entre los valores reales y nominales de los parámetros de todos los elementos?

Los límites de variación de U podrían estimarse escogiendo para todo elemento los valores «peores» de los parámetros. Pero no siempre ni mucho menos se conoce qué colección

de parámetros será la «peor». Además, habiendo muchos elementos, esta estimación resultará exagerada por cuanto es poco probable que todos los parámetros a la vez resulten «malos».

Por eso, es más razonable tratar de estimar la esperanza matemática $\mathsf{M}U$ y la varianza $\mathsf{D}U$ considerando que tanto los parámetros de los elementos como el propio parámetro U son variables aleatorias. La magnitud $\mathsf{M}U$ representará el valor medio de U en toda la partida de piezas y la magnitud $\mathsf{D}U$ indicará qué desviaciones entre U y $\mathsf{M}U$ pueden presentarse realmente.

Recordemos que (según hemos señalado en el punto 2.2)

$$\mathsf{M}U \neq f(\mathsf{M}R_{(1)}, \mathsf{M}R_{(2)}, \ldots; \mathsf{M}C_{(1)}, \mathsf{M}C_{(2)}, \ldots; \ldots).$$

Siendo f una función más o menos compleja, se hace imposible el cálculo analítico de la distribución de U. A veces se logra determinarla experimentalmente analizando una gran partida de piezas elaboradas. Pero esto no siempre es posible y jamás puede realizarse en la fase de diseño de una pieza.

Intentemos aplicar el método de Montecarlo. Para ello es necesario: a) conocer las características probabilísticas de todos los elementos y b) conocer la función f (más exactamente, saber calcular el valor de U a partir de cualesquiera valores fijos de $R_{(1)}, R_{(2)}, \ldots; C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots; \ldots$).

La distribución probabilística de los parámetros de cualquier elemento se puede obtener experimentalmente analizando una gran partida de estos elementos. Dicha distribución resulta muy a menudo normal. Por eso, muchos investigadores parten de ello considerando, por ejemplo, que la resistencia del elemento representado en la fig. 17 es una variable aleatoria normal ρ con la esperanza matemática $\mathsf{M}\rho = 22$ y con $3\sigma = 1{,}1$ (recordemos que en un experimento es prácticamente imposible obtener un valor de ρ que difiera de $\mathsf{M}\rho$ en más de 3σ; véase la fórmula (20)).

El esquema del análisis es muy sencillo: para todo elemento se sortea primero el valor del parámetro y se calcula después, a partir de la fórmula (30), el valor de U. Este experimento se repite N veces; obtenidos los valores $U_1, U_2, \ldots$

. . ., U_N, se toma aproximadamente

$$\mathsf{M}U \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} U_j,$$

$$\mathsf{D}U \approx \frac{1}{N-1} \left[\sum_{j=1}^{N} (U_j)^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{j=1}^{N} U_j \right)^2 \right].$$

Si N toma valores grandes, podemos sustituir el factor $1/(N-1)$ de la última fórmula por $1/N$ y entonces dicha

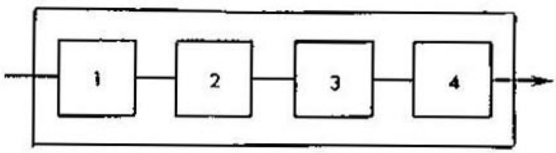


Fig. 18

fórmula resulta un simple corolario de las fórmulas (8) y (9). En la Estadística Matemática se demuestra que para valores pequeños de N conviene emplear el factor $1/(N-1)$.

6.2. Ejemplos de análisis de la seguridad. Supongamos que queremos estimar el tiempo medio de duración de una pieza aceptando que conocemos el tiempo de duración de cada uno de sus elementos.

Si consideramos que el tiempo $t_{(k)}$ de duración de todo elemento es una magnitud fija, no habrá dificultad en calcular el tiempo t de duración de la pieza. Por ejemplo, en la fig. 18 viene representada esquemáticamente una pieza que deja de funcionar cuando falla cualquiera de sus elementos; en este caso tenemos

$$t = \min (t_{(1)};\ t_{(2)};\ t_{(3)};\ t_{(4)}). \tag{31}$$

En cambio para la pieza con un elemento doblado representada esquemáticamente en la fig. 19, tenemos

$$t = \min [t_{(1)};\ t_{(2)};\ \max (t_{(3)};\ t_{(4)});\ t_{(5)}] \tag{32}$$

ya que si falla, por ejemplo, el elemento № 3, la pieza continuará funcionando a base del elemento № 4.

El tiempo de duración de cualquier elemento es, en realidad, una variable aleatoria $\Theta_{(k)}$. Cuando decimos que el plazo de duración de una bombilla es de 1 000 horas, estamos hablando del valor medio $M\Theta$ de la variable Θ; todos comprendemos que una bombilla se fundirá antes mientras que otra (de la misma partida) durará más.

Si conocemos las densidades de distribución de $\Theta_{(k)}$ para todos los elementos que componen la pieza, podemos

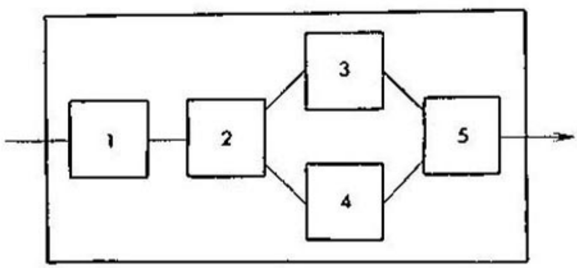


Fig. 19

calcular $M\Theta$ por el método de Montecarlo aplicando el procedimiento del punto 6.1. En efecto, para todo elemento podemos sortear el valor de la variable $\Theta_{(k)}$; sea $t_{(k)}$ este valor. Ahora, a partir de la fórmula correspondiente (31) o (32), podemos hallar el valor t de la variable aleatoria Θ. Repitiendo este experimento un número (N) suficiente de veces, podemos aceptar que

$$M\Theta \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} t_j,$$

donde t_j es el valor de t obtenido en el j-ésimo experimento.

Cabe subrayar que no es nada fácil determinar la distribución del plazo de duración $\Theta_{(k)}$ de los elementos; por ejemplo, para elementos que funcionan durante largo tiempo se hace difícil la organización del experimento pues habrá que esperar a que falle una cantidad suficiente de estos elementos.

6.3. Otras posibilidades del método. Los ejemplos expuestos permiten ver que la metodología del análisis de la cali-

dad de las piezas se basa en una idea muy simple. Es preciso conocer las características probabilísticas de todos los elementos que constituyen la pieza y saber calcular la variable que nos interesa como una función de los parámetros de estos elementos. La simulación permite entonces abarcar las propiedades aleatorias de los parámetros.

Aparte de la esperanza matemática y de la varianza de la variable que nos interesa, la simulación permite obtener mucha más información útil. Supongamos, por ejemplo,

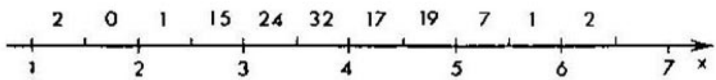


Fig. 20

que hemos obtenido una gran cantidad N de valores U_1, $U_2, \ldots, U_N$ de la variable aleatoria U. Basándonos en estos valores, podemos encontrar aproximadamente la densidad de distribución de U. Esta cuestión concierne, en realidad, a la Estadística ya que se trata de la elaboración de resultados de experimentos (realizados, es verdad, en una *MCE*). Por eso, nos limitaremos a considerar un ejemplo concreto.

Supongamos que hemos obtenido un total de $N = 120$ valores $U_1, U_2, \ldots, U_{120}$ de la variable aleatoria U comprendidos todos en los límites

$$1 < U_j < 6{,}5.$$

Dividamos el intervalo $1 < x < 6{,}5$ en 11 intervalos iguales de longitud $\Delta x = 0{,}5$ (o en otro número de intervalos no muy grande ni tampoco muy pequeño) y calculemos cuántos valores U_j corresponden a cada intervalo. Hemos representado estas cantidades en la fig. 20.

Dividiendo entre $N = 120$ estas cantidades, obtendremos las frecuencias correspondientes a cada intervalo. En nuestro caso estas frecuencias son: 0,017, 0; 0,008; 0,12; 0,20; 0,27; 0,14; 0,16; 0,06; 0,008 y 0,017.

En cada intervalo construimos ahora un rectángulo de área igual a la frecuencia de U_j correspondiente a dicho intervalo (fig. 21). En otras palabras, la altura de todo rectán-

gulo es igual a la frecuencia dividida entre Δx. La figura escalonada así obtenida se denomina *histograma*.

El histograma ofrece una aproximación de la densidad desconocida de la variable aleatoria U. Por esto, el área del histograma comprendida entre, digamos, $x = 2,5$ y $x = 5,5$ nos da un valor aproximado de la probabilidad

$$\mathsf{P}\,\{2,5 < U < 5,5\} \approx 0,95.$$

El cálculo (experimento) realizado nos permite afirmar, por consiguiente, que con una probabilidad aproximadamente igual a 0,95 la variable U está comprendida en el intervalo $2,5 < U < 5,5$.

En la fig. 21 hemos representado, a título comparativo, la densidad de la variable aleatoria normal ζ' con los parámetros $a = 3,85$ y $\sigma = 0,88$. Si partiendo de esta densidad calculamos la probabilidad de que ζ' pertenezca al intervalo $2,5 < \zeta' < 5,5$, obtendremos el valor 0,91[1]) bastante próximo al valor anterior.

---

[1]) Expliquemos cómo se efectúan los cálculos. Ségun (14), tenemos

$$\mathsf{P}\,\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{2,5}^{5,5} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$

Efectuemos en la integral la sustitución $x - a = \sigma t$. Tendremos entonces

$$\mathsf{P}\,\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt,$$

donde $t_1 = \dfrac{2,5 - a}{\sigma} = -1,54$ y $t_2 = \dfrac{5,5 - a}{\sigma} = 1,88$.

Para calcular el valor de la última integral hay que recurrir a la tabla de la así llamada integral de probabilidades $\Phi(x)$ en la que vienen los valores de la función

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Así encontramos

$$\mathsf{P}\,\{2,5 < \zeta' < 5,5\} = 0,5\,[\Phi(1,88) + \Phi(1,54)] = 0,91.$$

6.4. Observación. Lamentablemente son raros, por ahora, los casos en los que se aplican semejantes cálculos. Es difícil explicar esto. Posiblemente se deba a que los diseñadores ignoran esta posibilidad.

Además, para poder aplicar este método al diseño de piezas es necesario estudiar previamente las características

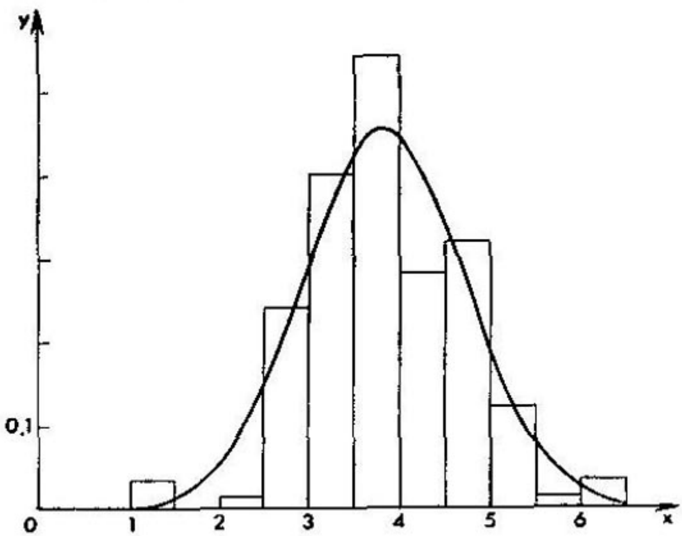


Fig. 21

probabilísticas de los elementos que componen la pieza. Éste es un trabajo voluminoso. Es verdad, que, conociendo estas características, se puede estimar la calidad de *cualquier* pieza formada por dichos elementos. También se puede analizar cómo varía la calidad al sustituir un elemento por otro.

Es de esperar que en los años próximos estos cálculos se hagan habituales. En cuanto a las características probabilísticas necesarias de los elementos, serán ofrecidas siempre por las empresas que los elaboren.

§ 7.
ANÁLISIS DEL PASO DE NEUTRONES A TRAVÉS DE UNA PLACA

Las leyes probabilísticas de la interacción entre una partícula elemental (neutrón, fotón, mesón, etc.) y la materia son conocidas. Como regla, es preciso conocer las características macroscópicas —densidades, flujos, etc.— de procesos en los que participa una gran cantidad de estas partículas. Esta situación se asemeja a la que hemos analizado en el § 5 y en el § 6 y resulta muy apropiada para la aplicación del método de Montecarlo.

Posiblemente sea en la Física de neutrones donde se aplica con mayor frecuencia el método de Montecarlo. Analizaremos la variante más sencilla del problema sobre el paso de neutrones a través de una placa.

7.1. Planteamiento del problema. Supongamos que una placa homogénea infinita $0 \leqslant x \leqslant h$ es bombardeada por un flujo de neutrones de energía E_0 siendo el ángulo de incidencia igual a 90°. Al chocar con los átomos de la placa, los neutrones pueden esparcirse elásticamente o pueden ser absorbidos. Supongamos, para simplificar, que el neutrón conserva, al esparcirse, su energía y que cualquier cambio en la dirección del neutrón, provocado por el choque con un átomo, es igualmente probable (esto último sucede en materias constituidas por átomos pesados). En la fig. 22 hemos representado las distintas suertes que pueden correr los neutrones: el neutrón (*a*) atraviesa la placa, el neutrón (*b*) es absorbido y el neutrón (*c*) es reflejado.

Es preciso calcular la probabilidad p^+ de que el neutrón atraviese la placa, la probabilidad p^- de que el neutrón sea reflejado y la probabilidad p^0 de que el neutrón resulte absorbido.

a interacción de los neutrones con la materia se caracteriza en este caso mediante dos constantes Σ_c y Σ_s que se denominan *sección de absorción* y *sección de dispersión*, respectivamente. Los índices *c* y *s* provienen de las letras iniciales de las palabras inglesas «capture» (captura) y «scattering» (dispersión).

La suma de estas secciones lleva el nombre de *sección completa*

$$\Sigma = \Sigma_c + \Sigma_s.$$

Las secciones tienen el siguiente significado físico: al chocar el neutrón con un átomo de la materia, la probabilidad

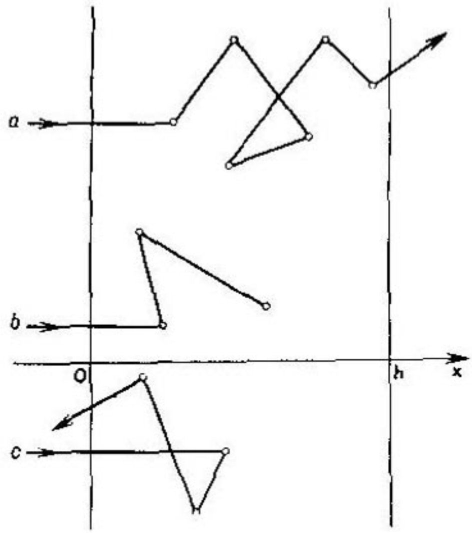


Fig. 22

de absorción es igual a Σ_c/Σ y la probabilidad de esparcimiento es igual a Σ_s/Σ.

El recorrido libre λ *del neutrón* (o sea, su recorrido entre un choque y otro) es una variable aleatoria que puede tomar cualesquiera valores positivos con la densidad de probabilidad

$$p(x) = \Sigma e^{-\Sigma x}.$$

Es fácil ver que la densidad de la variable λ coincide con la densidad (26) de la variable aleatoria τ en el caso del flujo elemental de pedidos. Esta analogía con el punto 5.2 nos permite escribir inmediatamente la fórmula para el

recorrido libre medio

$$M\lambda = 1/\Sigma$$

y la fórmula para el sorteo de λ

$$\lambda = -\frac{1}{\Sigma} \ln \gamma.$$

Resta explicar cómo se escoge la dirección aleatoria del neutrón cuando se produce el esparcimiento. Puesto que existe en el problema una simetría respecto al eje x, esta dirección se determina plenamente con sólo indicar el ángulo φ entre la dirección de la velocidad del neutrón y el eje Ox. Se puede demostrar[1]) que la condición de que todas las direcciones son igualmente probables es en este caso equivalente a la condición de que el coseno de este ángulo $\mu = \cos \varphi$ esté uniformemente distribuido en el intervalo $(-1, 1)$. Tomando en la fórmula (24) $a = -1$ y $b = 1$, obtenemos la fórmula para el sorteo de μ:

$$\mu = 2\gamma - 1.$$

7.2. Esquema de análisis basado en la simulación de trayectorias reales. Supongamos que el neutrón ha experimentado el k-ésimo esparcimiento en el punto de abscisa x_k correspondiente al interior de la placa y ha comenzado a moverse en la dirección μ_k.

Sorteemos el recorrido libre

$$\lambda_k = -(1/\Sigma) \ln \gamma$$

y calculemos la abscisa del punto de colisión siguiente (fig. 23)

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \mu_k.$$

Comprobamos la condición de que la placa ha sido atravesada

$$x_{k+1} > h.$$

Si esta condición se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria del neutrón y agregamos uno al contador de las partículas que atraviesan la placa. En el caso contrario, comprobamos la condición de reflexión

$$x_{k+1} < 0.$$

---

[1]) La demostración viene en el punto 9.4.

Si esta condición se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de las partículas reflejadas. Si tampoco se cumple esta condición, o sea, si $0 \leqslant x_{k+1} \leqslant h$, ello significará que el neutrón experimenta

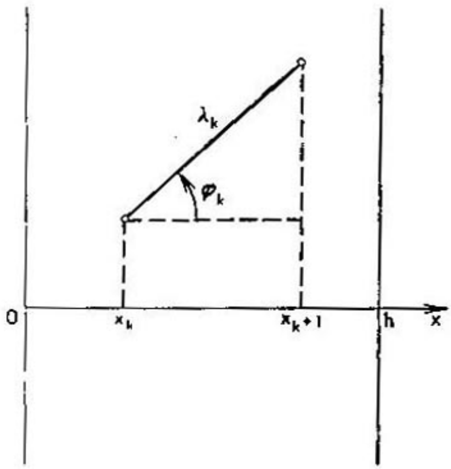


Fig. 28

la $(k+1)$-ésima colisión en el interior de la placa; habrá que sortear de nuevo el «destino» del neutrón en esta colisión.

De acuerdo con el punto 4.1 escogemos el valor siguiente de γ y comprobamos la condición de absorción

$$\gamma < \Sigma_c/\Sigma.$$

Si esta última desigualdad se cumple, concluimos el análisis de la trayectoria y agregamos uno al contador de partículas absorbidas. En el caso contrario, aceptamos que el neutrón experimenta un esparcimiento en el punto de abscisa x_{k+1}. Realizamos entonces el sorteo de la nueva dirección del neutrón

$$\mu_{k+1} = 2\gamma - 1$$

y volvemos a repetir todo el ciclo (tomando, claro está, otros valores para γ).

Hemos escrito todos los valores de γ sin índices sobrentendiendo que cada valor de γ se emplea una vez solamente. Para analizar un eslabón de la trayectoria es preciso emplear tres valores de γ.

Los valores iniciales para cada trayectoria son

$$x_0 = 0 \text{ y } \mu_0 = 1.$$

Después de haber analizado de esta forma N trayectorias, resultará que N^+ neutrones han atravesado la placa, que N^- neutrones han sido reflejados y que N^0 neutrones han quedado absorbidos.

Es evidente que las probabilidades buscadas son aproximadamente iguales a las razones

$$p^+ \approx \frac{N^+}{N}, \quad p^- \approx \frac{N^-}{N} \text{ y } p^0 \approx \frac{N^0}{N},$$

En la fig. 24 hemos representado el esquema sinóptico del programa correspondiente a este análisis. El índice j representa el número de la trayectoria y el índice k corresponde al número de la colisión (a lo largo de la trayectoria que se está analizando).

Este método de análisis, a pesar de ser muy natural, tiene sus deficiencias. En particular, resulta difícil calcular por este método la probabilidad p^+ cuando ella es muy pequeña. Pero precisamente con este caso nos encontramos al analizar la protección contra la radiación.

Existen modificaciones ingeniosas del método de Montecarlo que pueden ser aplicadas también en estos casos.

Detengámonos brevemente en la variante más sencilla del análisis que se basa en el empleo de los así llamados «pesos».

7.3. Esquema de análisis basado en el empleo de pesos que sustituyen la absorción. Consideremos el mismo problema sobre el paso de los neutrones. Supongamos que a lo largo de la trayectoria se desplaza un «tren» formado por un gran número w_0 de neutrones idénticos. Al producirse la colisión en el punto de abscisa x_1, un promedio de $w_0\ (\Sigma_c/\Sigma)$ de neutrones del «tren» será absorbido y un promedio de $w_0\ (\Sigma_s/\Sigma)$ de neutrones será esparcido.

Agreguemos la cantidad $w_0\ (\Sigma_c/\Sigma)$ al contador de partículas absorbidas y continuemos el análisis del «tren» esparcido

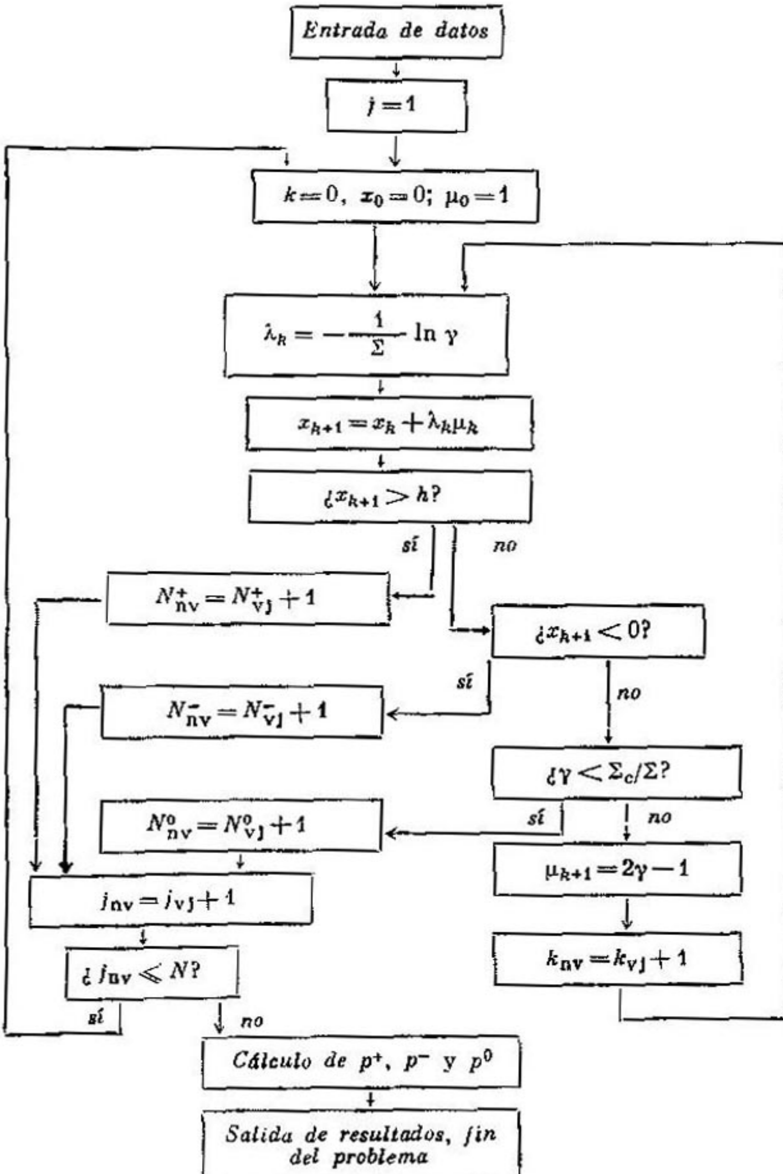

Entrada de datos
$j=1$
$k=0,\ x_0=0;\ \mu_0=1$
$\lambda_k=-\frac{1}{\Sigma}\ln\gamma$
$x_{k+1}=x_k+\lambda_k\mu_k$
¿$x_{k+1}>h$?
sí
no
$N^{+}_{nv}=N^{+}_{vj}+1$
¿$x_{k+1}<0$?
sí
no
$N^{-}_{nv}=N^{-}_{vj}+1$
¿$\gamma<\Sigma_c/\Sigma$?
sí
no
$N^{0}_{nv}=N^{0}_{vj}+1$
$\mu_{k+1}=2\gamma-1$
$j_{nv}=j_{vj}+1$
$k_{nv}=k_{vj}+1$
¿$j_{nv}\leqslant N$?
sí
no
Cálculo de p^{+}, p^{-} y p^{0}
Salida de resultados, fin del problema

Fig. 24

aceptando que todo el «tren» restante se mueve en una misma dirección.

Todas las fórmulas que hemos dado en el punto 7.2 se conservan. La única diferencia consiste en que, después de cada colisión, la cantidad de neutrones en el «tren» disminuirá, siendo

$$w_{k+1} = w_k (\Sigma_s/\Sigma),$$

ya que una parte del «tren», con un total de $w_k (\Sigma_c/\Sigma)$ de neutrones, será absorbida; además, la trayectoria jamás podrá terminarse con la absorción.

La variable w_k suele denominarse *peso* de neutrón y, en lugar de un «tren» formado por w_k neutrones, suele hablarse de un neutrón de peso w_k. El peso inicial w_0 se toma, como regla, igual a 1. Esto no contradice nuestra hipótesis de que el «tren» es grande, pues es fácil ver que w_0 es un factor común de todos los pesos w_k que se obtienen al analizar una trayectoria.

El esquema sinóptico del programa correspondiente a este análisis viene representado en la fig. 25. Como puede verse no resulta más complejo que el esquema de la fig. 24. Sin embargo, se puede demostrar[1]) que siempre es más conveniente calcular p^+ por el método de este punto y no por el método del punto 7.2.

7.4. Observación. Existe una gran variedad de procedimientos de cálculo que se basan en el empleo de distintos pesos. No podemos detenernos aquí en estas cuestiones.

Señalemos solamente que el método de Montecarlo es aplicable a problemas mucho más complejos relacionados con partículas elementales. Por ejemplo, al caso en que el medio se compone de materias distintas y tiene una estructura geométrica arbitraria o al caso en que la energía de la partícula varía después de cada colisión. Así mismo, hace posible el análisis de otros muchos aspectos de los procesos nucleares: permite prever la posibilidad de que el átomo se desintegre al chocar con el neutrón y de que surjan neutrones nuevos; permite determinar el momento de inicio y la condición de mantenimiento de la reacción en cadena; etc.

---

[1]) La demostración viene en el punto 9.5.

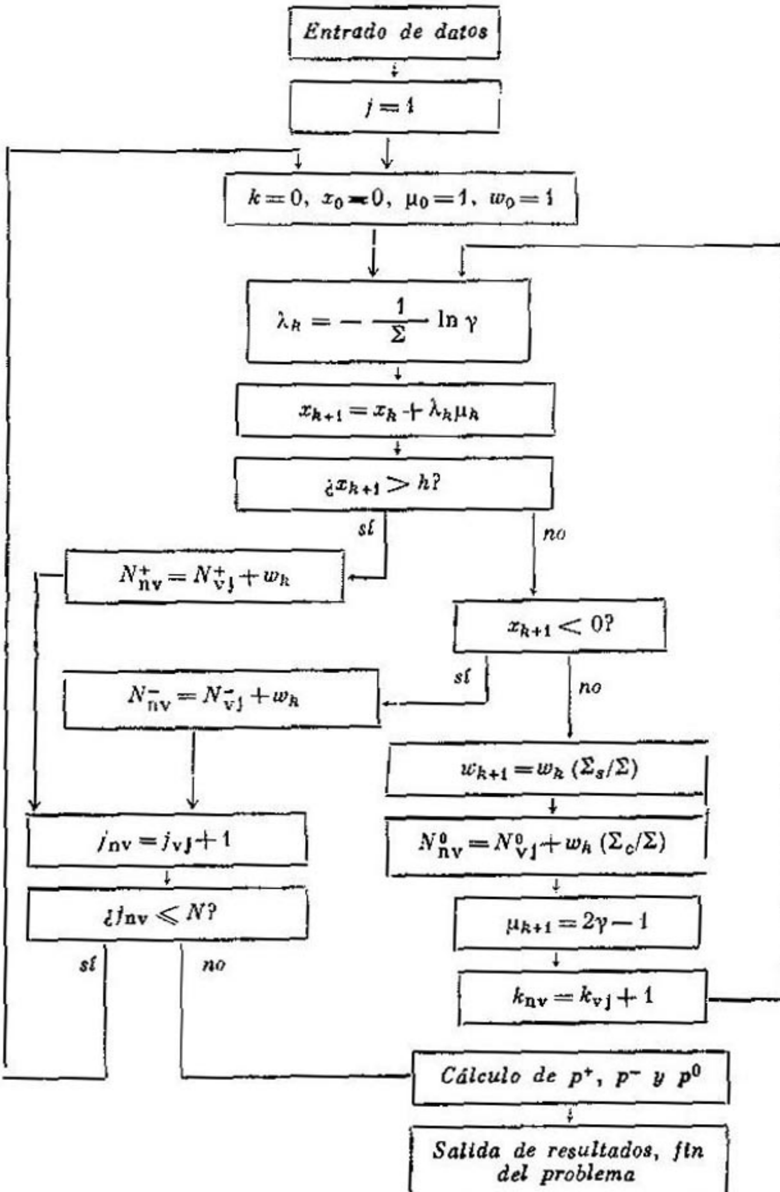

Entrado de datos
j = 1
k = 0, x₀ = 0, μ₀ = 1, w₀ = 1
λ_k = − (1/Σ) ln γ
x_{k+1} = x_k + λ_k μ_k
¿x_{k+1} > h?
sí
no
N⁺_nv = N⁺_vj + w_k
x_{k+1} < 0?
sí
no
N⁻_nv = N⁻_vj + w_k
w_{k+1} = w_k (Σ_s/Σ)
N⁰_nv = N⁰_vj + w_k (Σ_c/Σ)
j_nv = j_vj + 1
¿j_nv ⩽ N?
μ_{k+1} = 2γ − 1
sí
no
k_nv = k_vj + 1
Cálculo de p⁺, p⁻ y p⁰
Salida de resultados, fin del problema

Fig. 25

§ 8.
CÁLCULO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Los problemas considerados en los parágrafos 5, 6 y 7 eran de contenido probabilístico por su esencia y la aplicación del método de Montecarlo en estos problemas parecía bastante natural. Ahora consideraremos un problema puramente matemático, el cálculo aproximado de la integral definida.

Puesto que el cálculo de integrales definidas equivale al cálculo de áreas, podríamos emplear el método del punto 1.2. Aquí explicaremos otro método, más efectivo, que permite construir diferentes modelos probabilísticos para resolver este problema por el método de Montecarlo y explicaremos cómo escoger entre estos modelos los «más convenientes».

8.1. Método de cálculo. Consideremos una función $g(x)$ definida en el intervalo $a < x < b$. Es preciso hallar el valor aproximado de la integral

$$I = \int_a^b g(x)\,dx. \tag{33}$$

Tomemos una densidad de distribución $p_\xi(x)$ arbitraria definida en el intervalo (a, b) (o sea, una función $p_\xi(x)$ cualquiera que cumpla las condiciones (15) y (16)).

Además de la variable aleatoria ξ definida con la densidad $p_\xi(x)$ en el intervalo (a, b), necesitaremos emplear la variable aleatoria

$$\eta = g(\xi)/p_\xi(\xi).$$

Según (18), tenemos

$$\mathrm{M}\eta = \int_a^b [g(x)/p_\xi(x)]\,p_\xi(x)\,dx = I.$$

Consideremos ahora N variables aleatorias $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$, independientes e idénticas, y apliquemos a la suma de estas variables el teorema central del límite del punto 2.4. La

fórmula (21) se puede escribir en nuestro caso así

$$\mathsf{P}\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\eta_j - I\right| < 3\sqrt{\frac{\mathsf{D}\eta}{N}}\right\} \approx 0{,}997. \qquad (34)$$

Escojamos N valores $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. La última relación nos dice que siendo N suficientemente grande tendremos

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(\xi_j)}{p_\xi(\xi_j)} \approx I. \qquad (35)$$

Al mismo tiempo nos dice que con una elevada probabilidad el error de la aproximación (35) no pasa de

$$3\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}.$$

8.2. Cómo escoger el esquema de cálculo. Como hemos visto para calcular la integral (33) se puede emplear una variable aleatoria ξ cualquiera definida en el intervalo (a, b). En todos los casos

$$\mathsf{M}\eta = \mathsf{M}\,[g(\xi)/p_\xi(\xi)] = I.$$

Pero la varianza $\mathsf{D}\eta$ y, por consiguiente, también la estimación (35) del error depende de qué variable ξ tomemos. En efecto,

$$\mathsf{D}\eta = \mathsf{M}(\eta^2) - I^2 = \int_a^b [g^2(x)/p_\xi(x)]\,dx - I^2.$$

Se puede demostrar[1]) que esta expresión será mínima cuando $p_\xi(x)$ sea proporcional a $|g(x)|$.

Por supuesto, no podemos escoger fórmulas muy complejas para $p_\xi(x)$ ya que entonces resultará laborioso sortear los valores de ξ. Pero es posible guiarse por esta recomendación a la hora de escoger la función $p_\xi(x)$ (véase el ejemplo del punto 8.3).

En la práctica el método de Montecarlo no se aplica para el cálculo de integrales de tipo (33) ya que existen métodos más exactos basados en las fórmulas de cuadratura. Pero la situación cambia si pasamos a considerar integrales múltiples: las fórmulas de cuadratura se hacen muy voluminosas mientras que el método de Montecarlo no necesita casi modificaciones.

---

[1]) La demostración viene en el punto 9.6.

8.3. Ejemplo numérico. Calculemos el valor aproximado de la integral

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx.$$

El valor exacto de esta integral es

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1.$$

Emplearemos para el cálculo dos distintas variables aleatorias ξ: una con la densidad constante $p_\xi(x) \equiv 2/\pi$ (o sea, uniformemente distribuida en el intervalo $(0, \pi/2)$) y otra con la densidad lineal $p_\xi(x) = 8x/\pi^2$. En la fig. 26 hemos representado ambas densidades así

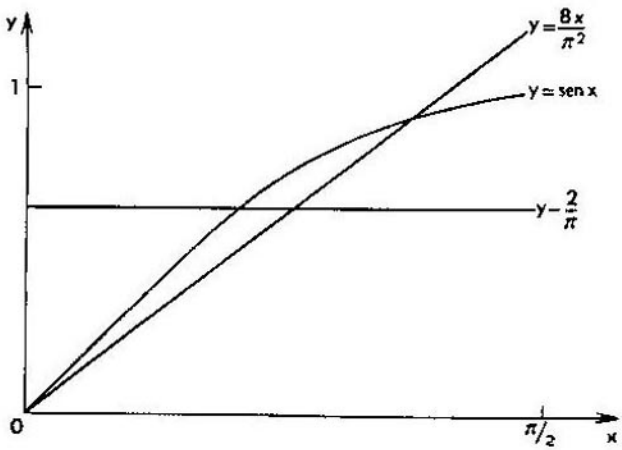


Fig. 26

como la función integrando sen x. La figura permite ver que la densidad lineal está en mayor consonancia con la recomendación del punto 8.2 de que es deseable que $p_\xi(x)$ y sen x sean proporcionales. Por ello, es de esperar que el segundo procedimiento dé un resultado mejor.

(a) Sea $p_\xi(x) \equiv 2/\pi$ en el intervalo $(0, \pi/2)$. La fórmula del sorteo de ξ se puede obtener de la fórmula (24) tomando $a = 0$ y $b = \pi/2$:

$$\xi = \pi\gamma/2.$$

La fórmula (35) da

$$I \approx \frac{\pi}{2N} \sum_{j=1}^{N} \operatorname{sen} \xi_j$$

Sea $N = 10$. Tomemos para los valores de γ las ternas de cifras de la tabla A (multiplicándolas por 0,001). Los cálculos auxiliares aparecen en la tabla 1.

Tabla 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,359	0,250	0,124	0,889	0,243	1,043	0,542	1,029	1,275	0,521
sen ξ_j	0,978	0,247	0,124	0,776	0,241	0,864	0,516	0,857	0,957	0,498

El resultado de los cálculos es

$$I \approx 0{,}952.$$

(b) Sea ahora $p_\xi(x) = 8x/\pi^2$. Para sortear ξ empleamos la ecuación (23)

$$\int_0^\xi (8x/\pi^2)\,dx = \gamma;$$

de aquí encontramos fácilmente que

$$\xi = \frac{\pi}{2}\sqrt{\gamma}.$$

La fórmula (35) da

$$I \approx \frac{\pi^2}{8N}\sum_{j=1}^{N}\frac{\operatorname{sen}\xi_j}{\xi_j}.$$

Sea $N = 10$. Los números γ se escogen igual que en el caso (a). Los cálculos auxiliares aparecen en la tabla 2.

Tabla 2

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
γ_j	0,865	0,159	0,079	0,566	0,155	0,664	0,345	0,655	0,812	0,332
ξ_j	1,461	0,626	0,442	1,182	0,618	1,280	0,923	1,271	1,415	0,905
$\dfrac{\operatorname{sen}\xi_j}{\xi_j}$	0,680	0,936	0,968	0,783	0,937	0,748	0,863	0,751	0,698	0,868

El resultado de los cálculos es

$$I \approx 1{,}016.$$

El segundo procedimiento, como lo habíamos previsto, da un resultado más exacto.

8.4. Sobre la estimación del error. En el punto 8.2 ya hemos señalado que el error absoluto que se obtiene al calcular la integral I mediante la fórmula (35) no puede prácticamente sobrepasar la magnitud $3\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}$. Pero el error absoluto real es, como regla, considerablemente menor. Por eso, para caracterizar el error suele emplearse en la práctica otra magnitud denominada error probable

$$\delta_{pr} = 0{,}675\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}.$$

El error absoluto real depende de los números aleatorios que se han empleado en el cálculo y puede suceder que sea 2 ó 3 veces mayor o varias veces menor que δ_{pr}. Es decir, δ_{pr} indica tan sólo el orden del error y no sus límites[1]).

Volvamos al ejemplo del punto 8.3. Empleando los valores que aparecen en las tablas 1 y 2 y la fórmula para la varianza indicada en el punto 6.1, podemos calcular aproximadamente las varianzas $\mathsf{D}\eta$ en ambos procedimientos [2]).

En la tabla 3 indicamos para ambos métodos los valore aproximados de las varianzas $\mathsf{D}\eta$ los errores probables δ_{pr} calculados

Tabla 3

Método	$\mathsf{D}\eta$	δ_{pr}	$\delta_{cál}$
(a)	0,256	0,103	0,048
(b)	0,016	0,027	0,016

[1]) Sobre el error probable véase el punto 9.7.

[2]) En el caso del método (a) tenemos

$$\mathsf{D}\eta \approx \frac{\pi^2}{9\cdot 4}\left[\sum_{j=1}^{10} (\operatorname{sen}\xi_j)^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{j=1}^{10} \operatorname{sen}\xi_j\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi^2}{36}(4{,}604 - 3{,}670) = 0{,}256.$$

a base de estos valores y los errores absolutos reales $\delta_{\text{cál}}$ que se han obtenido en los cálculos.

Como vemos, δ_{cal} es efectivamente del mismo orden que δ_{pr}.

APÉNDICE

§ 9. DEMOSTRACIÓN DE ALGUNAS PROPOSICIONES

En este parágrafo insertamos la demostración de algunas proposiciones enunciadas en los parágrafos anteriores que o bien nos parecen un tanto voluminosas para el nivel que hemos mantenido en la exposición o bien requieren conocimientos más profundos de la Teoría de las probabilidades.

9.1. Argumentación del método de Neumann para el sorteo de una variable aleatoria (punto 4.3). El punto aleatorio Γ está uniformemente distribuido en el rectángulo $abcd$ (fig. 27) cuyo área es igual a $M_0(b-a)$[1]. La probabilidad de que el punto Γ aparezca por debajo de la curva $y = p(x)$ y no sea rechazado de la consideración, es igual a la razón entre las áreas

$$\frac{\int_a^b p(x)\,dx}{M_0(b-a)} = \frac{1}{M_0(b-a)}$$

La probabilidad de que el punto Γ aparezca por debajo de la curva $y = p(x)$ y corresponda al intervalo $a' < x <$

En el caso del método (b) tenemos

$$D\eta \approx \frac{\pi^4}{9\cdot 64}\left[\sum_{j=1}^{10}\left(\frac{\operatorname{sen}\xi_j}{\xi_j}\right)^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{j=1}^{10}\frac{\operatorname{sen}\xi_j}{\xi_j}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{\pi^4}{576}(6{,}875 - 6{,}777) = 0{,}016.$$

[1]) Véase el punto 9.3.

$< b'$ es también igual a la razón entre las áreas

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx}{M_0(b-a)}.$$

Por consiguiente, entre todos los valores que hemos escogido para ξ, la parte de los valores que pertenecen al inter-

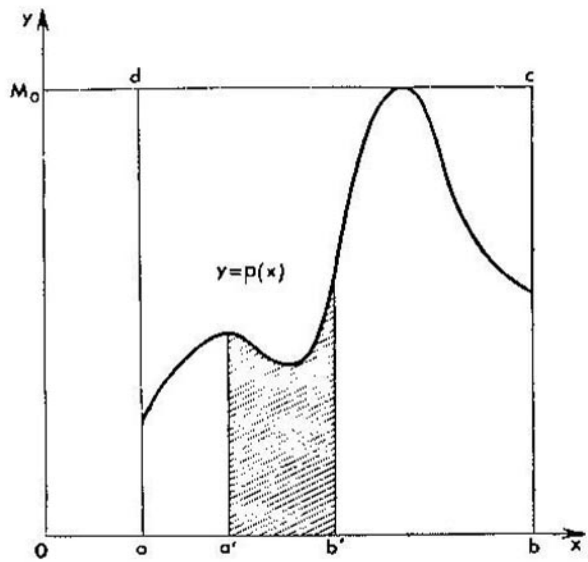


Fig. 27

valo (a', b') es igual al cociente

$$\frac{\int_{a'}^{b'} p(x)\,dx}{M_0(b-a)} : \frac{1}{M_0(b-a)} = \int_{a'}^{b'} p(x)\,dx$$

que es lo que se quería demostrar.

9.2. Densidad de distribución de la variable $\zeta' = a + \sigma\zeta$ (punto 4.4). Se supone que la variable ζ es una variable normal con la esperanza matemática $M\zeta = 0$ y la

varianza $\mathsf{D}\zeta = 1$ de modo que su densidad es

$$p_\zeta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Para calcular la densidad de distribución de la variable ζ', escojamos dos números arbitrarios $x_1 < x_2$ y calculemos la probabilidad

$$\mathsf{P}\{x_1 < \zeta' < x_2\} = \mathsf{P}\{x_1 < a + \sigma\zeta < x_2\} =$$
$$= \mathsf{P}\left\{\frac{x_1 - a}{\sigma} < \zeta < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right\}.$$

Por consiguiente,

$$\mathsf{P}\{x_1 < \zeta' < x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_1-a)/\sigma}^{(x_2-a)/\sigma} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Realizando en la última integral la sustitución $x' = a + \sigma x$, obtenemos

$$\mathsf{P}\{x_1 < \zeta' < x_2\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x'-a)^2}{2\sigma^2}} dx',$$

de donde resulta (véase (14)) que la variable ζ' es una variable normal con los parámetros $\mathsf{M}\zeta' = a$ y $\mathsf{D}\zeta' = \sigma^2$.

9.3. Distribución uniforme de los puntos (γ', γ'') en el cuadrado (punto 4.5). Puesto que las coordenadas del punto (γ', γ'') son independientes, su densidad $p(x, y)$ es igual al producto de las densidades

$$p(x, y) = p_{\gamma'}(x)\, p_{\gamma''}(y).$$

Cada una de estas densidades es igual idénticamente a 1. Por consiguiente, $p(x, y) \equiv 1$ (para $0 < x < 1$ y $0 < y < 1$). Pero esto significa precisamente que el punto (γ', γ'') está uniformemente distribuido en el cuadrado de dimensión 1.

9.4. Selección de la dirección aleatoria (punto 7.1). La dirección se puede determinar mediante un vector de longitud 1 que arranca del origen de coordenadas. Los extremos de estos vectores se encuentran en la superficie esférica de radio 1. Las palabras «cualquier dirección es igualmente probable» significan que el extremo del vector representa

un punto aleatorio Ω uniformemente distribuido sobre la superficie esférica; es decir, la probabilidad de que Ω pertenezca a cualquier elemento dS de la superficie es igual a $\frac{dS}{4\pi}$.

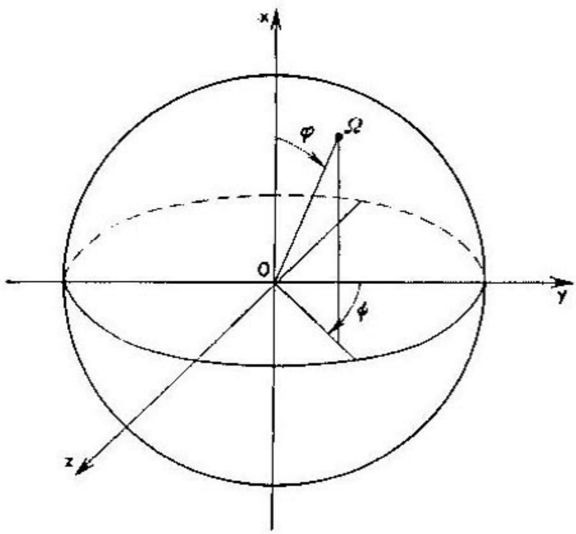


Fig. 28

Tomemos en la superficie esférica las coordenadas esféricas (φ, ψ) con el eje polar Ox (fig. 28). Tendremos entonces

$$dS = \operatorname{sen} \varphi \, d\varphi \, d\psi \tag{36}$$

con la particularidad de que $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$.

Sea $p(\varphi, \psi)$ la densidad del punto aleatorio (φ, ψ). Debemos tener

$$p(\varphi, \psi) \, d\varphi \, d\psi = dS/4\pi;$$

de aquí y de la relación (36) se deduce que

$$p(\varphi, \psi) = \frac{\operatorname{sen} \varphi}{4\pi}; \tag{37}$$

A partir de la densidad conjunta de φ y ψ, podemos calcular fácilmente las densidades de estas variables:

$$p_\varphi(\varphi) = \int_0^{2\pi} p(\varphi, \psi)\, d\psi = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{2}, \tag{38}$$

$$p_\psi(\psi) = \int_0^{\pi} p(\varphi, \psi)\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}. \tag{39}$$

La igualdad $p(\varphi, \psi) = p_\varphi(\varphi)\, p_\psi(\psi)$ demuestra que φ y ψ son independientes.

Es obvio que ψ está uniformemente distribuida en el intervalo $(0, 2\pi)$ y, por eso, la fórmula para el sorteo de ψ es

$$\psi = 2\pi\gamma. \tag{40}$$

La fórmula para el sorteo de φ se obtiene de la ecuación (23):

$$\frac{1}{2}\int_0^{\varphi} \operatorname{sen} x\, dx = \gamma,$$

de donde resulta

$$\cos\varphi = 1 - 2\gamma. \tag{41}$$

Las fórmulas (40) y (41) permiten escoger (sortear) la dirección aleatoria. Por supuesto, los valores de γ en estas fórmulas deben ser distintos.

La última fórmula del punto 7.1 se obtiene de la fórmula (41) si se toma $1 - \gamma$ en lugar de γ; pero estas variables tienen la misma distribución.

9.5. Ventaja del método de análisis basado en el empleo de pesos (punto 7.3). Consideremos las variables aleatorias ν y ν' iguales a la cantidad (peso) de neutrones de una misma trayectoria que atraviesan la placa, con la particularidad de que la primera variable corresponde al método del punto 7.2 y la segunda, al método del punto 7.3.

Según el contenido físico del problema tenemos

$$\mathsf{M}\nu = \mathsf{M}\nu' = p^{+}.$$

(Véase la demostración rigurosa de esta afirmación en el libro [3].)

Puesto que ν puede tomar sólo dos valores, 0 y 1, la distribución de ν es

$$\nu=\begin{pmatrix}1 & 0\\ p^+ & 1-p^+\end{pmatrix}.$$

Tomando en cuenta que $\nu^2=\nu$, es fácil ver que $\mathsf{D}\nu = p^+ - (p^+)^2$. Es evidente que la variable ν' puede tomar, aparte del valor 0, un conjunto infinito de valores $w_0 = 1$, $w_1, w_2, \ldots, w_k, \ldots$ Por eso, su distribución es

$$\nu' = \begin{pmatrix}w_0 & w_1 & w_2 & \ldots & w_k & \ldots & 0\\ q_0 & q_1 & q_2 & \ldots & q_k & \ldots & q\end{pmatrix}.$$

Los valores concretos de q_i, como veremos, no nos harán falta. Cualesquiera que sean podemos representar la varianza en la forma

$$\mathsf{D}\nu' = \sum_{k=0}^{\infty} w_k^2 q_k - (p^+)^2.$$

Observando que todos los $w_k \leqslant 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} w_k q_k = \mathsf{M}\nu' = p^+$, obtenemos la desigualdad $\mathsf{D}\nu' \leqslant p^+ - (p^+)^2 = \mathsf{D}\nu$.

El hecho de que la varianza de ν' sea siempre menor que la varianza de ν significa que, al calcular p^+, el método del punto 7.3 dará siempre mejores resultados que el método del punto 7.2. La misma conclusión podemos hacer en cuanto al cálculo de p^- y también al cáclulo de p^0 si la absorción no es muy grande.

9.6. Selección óptima de ξ (punto 8.2). En el punto 8.2 hemos obtenido la expresión para la varianza $\mathsf{D}\eta$. Para hallar el mínimo de esta expresión, siendo arbitraria la selección de $p_\xi(x)$, recurriremos a la siguiente desigualdad conocida del Análisis

$$\left[\int_a^b |u(x)\,v(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b u^2(x)\,dx \cdot \int_a^b v^2(x)\,dx.$$

Tomando $u = g(x)/\sqrt{p_\xi(x)}$ y $v = \sqrt{p_\xi(x)}$, obtenemos de esta desigualdad

$$\left[\int_a^b |g(x)|\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)}\,dx \cdot \int_a^b p_\xi(x)\,dx = \int_a^b \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)}\,dx.$$

Por consiguiente,

$$\mathsf{D}\eta \geqslant \left[\int_a^b |g(x)|\, dx \right]^2 - I^2. \tag{42}$$

Resta demostrar que la cota inferior se alcanza cuando $p_\xi(x)$ es proporcional a $|g(x)|$.

Sea

$$p_\xi(x) = \frac{|g(x)|}{\int_a^b |g(x)|\, dx}. \tag{43}$$

Es fácil calcular que para esta densidad $p_\xi(x)$ se tiene

$$\int_a^b [g^2(x)/p_\xi(x)]\, dx = \left[\int_a^b |g(x)|\, dx \right]^2$$

de modo que la varianza $\mathsf{D}\eta$ resulta efectivamente igual al segundo miembro de (42).

Observemos que es prácticamente imposible emplear en el cálculo la densidad «más conveniente» (43): deberíamos conocer para ello el valor de la integral $\int_a^b |g(x)|\, dx$; pero el cálculo de esta integral es, de hecho, un problema equivalente al problema que tenemos planteado acerca del cálculo de la integral $\int_a^b g(x)\, dx$. Por eso, nos hemos limitado a dar la recomendación indicada en el punto 8.2.

9.7. Definición del error probable (punto 8.4). Sea ζ la variable aleatoria normal definida en el punto 2.3. Es fácil calcular que para $r = 0{,}675\sigma$ y cualesquiera a y σ se tiene

$$\int_{a-r}^{a+r} p_\zeta(x)\, dx = 0{,}5.$$

De aquí se deduce que

$$\mathsf{P}\{|\zeta - a| < r\} = \mathsf{P}\{|\zeta - a| > r\} = 0{,}5,$$

o sea, que las desviaciones mayores que r y las desviaciones menores que r son igualmente probables. Por eso, la magnitud r se denomina *error probable* de la variable aleatoria ζ.

En el punto 8.1 hemos realizado el cálculo aproximado de la variable normal $\rho = (1/N)(\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_N)$. Resultó que su esperanza matemática es $a = \mathsf{M}\rho = I$ y que su varianza es $\sigma^2 = \mathsf{D}\rho = \mathsf{D}\eta/N$. Por eso, el error probable de la variable ρ es aproximadamente igual a $0{,}675\sqrt{\mathsf{D}\eta/N}$.

§ 10. SOBRE LOS NÚMEROS SEUDOALEATORIOS

Los algoritmos que se emplean para obtener números seudoaleatorios tienen, en su mayoría, la forma

$$\gamma_{k+1} = F(\gamma_k). \tag{44}$$

Si se ha dado el número inicial γ_0, todos los números siguientes $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ se calculan aplicando la fórmula (44) con $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ambos algoritmos considerados en el punto 3.3 son también de la forma (44) sólo, en lugar de señalar la forma analítica de la función $y = F(x)$, se ha indicado el conjunto de operaciones que debe efectuarse con el argumento x para obtener el valor de y.

10.1. Cómo debe escogerse la función $F(x)$. El ejemplo que sigue explica en qué consiste una de las dificultades principales que se plantea al escoger $F(x)$.

Ejemplo. Demostremos que la función $y = F(x)$ cuyo gráfico aparece en la fig. 29 no se puede emplear para obtener, a partir de la fórmula (44), números seudoaleatorios.

En efecto, consideremos en el cuadrado $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ los puntos de coordenadas

$$(\gamma_1, \gamma_2), (\gamma_3, \gamma_4), (\gamma_5, \gamma_6), \ldots,$$

donde $\gamma_2 = F(\gamma_1)$, $\gamma_4 = F(\gamma_3)$, $\gamma_6 = F(\gamma_5)$, ... Todos estos puntos se encuentran sobre la curva $y = F(x)$ y esto, por supuesto, está muy mal ya que los puntos aleatorios verdaderos deben cubrir uniformemente todo el cuadrado (véase el punto 9.3).

Este ejemplo permite ver que el empleo de la función $y = F(x)$ en la fórmula (44) puede resultar exitoso sólo si el gráfico de esta función recubre con bastante densidad todo el cuadrado.

Este es el caso, por ejemplo, de la función

$$y = \{gx\}, \tag{45}$$

donde g es un número muy grande y $\{z\}$ representa la parte fraccionaria del número z. En la fig. 30 aparece el gráfico

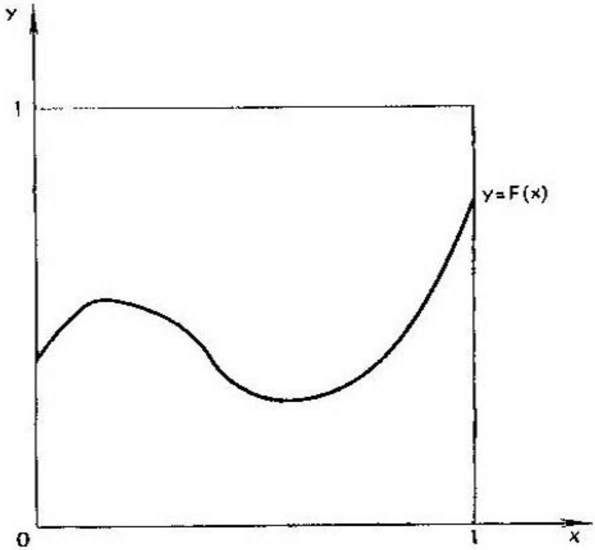


Fig. 29

de la función (45) correspondiente a $g = 20$. El lector podrá hacerse una idea de lo que representará este gráfico si $g = 5^{17}$.

10.2. Método de congruencias (método de residuos). El algoritmo que más se emplea para obtener números seudoaleatorios fue propuesto por D. Lehmer. Se basa en la función (45), pero suele construirse de una manera algo distinta que permite realizarlo fácilmente en las *MCE*.

Se determina una sucesión de números enteros m_k tomando $m_0 = 1$ y calculando todos los números sucesivos m_1, m_2, . . . a partir de una misma fórmula

$$m_{k+1} \equiv 5^{17} m_k \pmod{2^{40}}, \qquad (46)$$

donde $k = 0, 1, 2, \ldots$ Basándose en los números m_k, se calculan los números seudoaleatorios

$$\gamma_k = 2^{-40} m_k. \qquad (47)$$

La fórmula (46) significa que el número m_{k+1} es igual al resto que se obtiene al dividir $5^{17}m_k$ entre 2^{40}. En la teoría de las congruencias (véase cualquier texto de Teoría de los

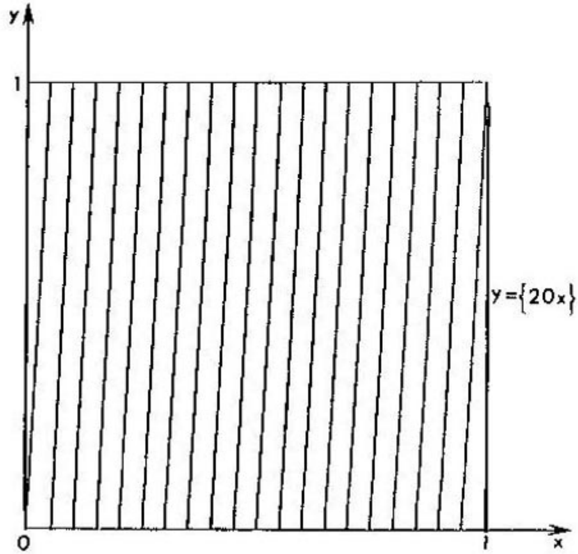


Fig. 30

números) este resto lleva el nombre de residuo positivo módulo 2^{40} mínimo. Por eso, el algoritmo suele denominarse método de congruencias o método de residuos.

Es muy fácil realizar las fórmulas (46) y (47) en las *MCE* que funcionan con números de 40 órdenes aplicando la operación de multiplicación con el número duplicado de órdenes[1]): hay que emplear las cifras correspondientes a los órdenes menores del producto.

El período de la sucesión m_k es igual a 2^{38}.

En el caso de las *MCE* que funcionan con número de 36 órdenes, se toman en las fórmulas (46) y (47) los números 5^{15} y 2^{36} en lugar de 5^{17} y 2^{40}; el período de la sucesión m_k es igual entonces a 2^{34}.

---

[1]) La *MCE Strelá* (véase el punto 3.3) no puede realizar esta operación.

Tabla A. 400 cifras aleatorias [1]

86 515	90 795	66 155	66 434	56 558	12 332	94 377	57 802
69 186	03 393	42 502	99 224	88 955	53 758	91 641	18 867
41 686	42 163	85 181	38 967	33 181	72 664	53 807	00 607
86 522	47 171	88 059	89 342	67 248	09 082	12 311	90 316
72 587	93 000	89 688	78 416	27 589	99 528	14 480	50 961
52 452	42 499	33 346	83 935	79 130	90 410	45 420	77 757
76 773	97 526	27 256	66 447	25 731	37 525	16 287	66 181
04 825	82 134	80 317	75 120	45 904	75 601	70 492	10 274
87 113	84 778	45 863	24 520	19 976	04 925	07 824	76 044
84 754	57 616	38 132	64 294	15 218	49 286	89 571	42 903

Tabla B. 88 valores normales [2]

0,2005	1,1922	—0,0077	0,0348	1,0423	—1,8149	1,1803	0,0033
1,1609	—0,6690	—1,5893	0,5816	1,8818	0,7390	—0,2736	1,0828
0,5864	—0,9245	0,0904	1,5068	—1,1147	0,2776	0,1012	—1,3566
0,1425	—0,2863	1,2809	0,4043	0,6379	—0,4428	—2,3006	—0,6446
0,9516	—1,7708	2,8854	0,4686	1,4664	1,6852	—0,9690	—0,0831
—0,5863	0,8574	—0,5557	0,8115	—0,2676	—1,2496	—1,2125	1,3846
1,1572	0,9990	—0,1032	0,5405	—0,6022	0,0093	0,2119	—1,4647
—0,4428	—0,5564	—0,5098	—1,1929	—0,0572	—0,5061	—0,1557	—1,2384
—0,3924	1,7981	0,6141	—1,3596	1,4943	—0,4406	—0,2033	—0,1316
0,8319	0,4270	—0,8888	0,4167	—0,8513	1,1054	1,2237	—0,7003
0,9780	—0,7679	0,8960	0,5154	—0,7165	0,8563	—1,1630	1,8800

[1] Las cifras aleatorias imitan los valores de la variable aleatoria con la distribución (22) (véase el punto 3.1).

[2] Los valores normales imitan los valores de la variable aleatoria normal (gaussiana) ζ con los parámetros $a = 0$ y $\sigma = 1$.

LITERATURA

1. Buslenko N. P., Golenko D. I., Sóbol I. M., Sragovich V. G., Shreider Yu, A, *Método de ensayos estadísticos* (Método de Montecarlo), Fizmatguiz, Serie de la biblioteca matemática, 1962 [Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М., Срагович В. Г., Шрейдер Ю. А. Метод статистических испытаний (Метод Монте-Карло), Физматгиз, СМБ, 1962]
2. Ermakov S. M. *Método de Montecarlo y problemas* referentes, Nauka, 1971 [Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы, Наука, 1971]
3. Sóbol I. M. *Métodos numéricos de Montecarlo*, Nauka, 1973 [Соболь И. М. Численные методы Монте-Карло, Наука, 1973]

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», 1 Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Editorial MIR Moscú